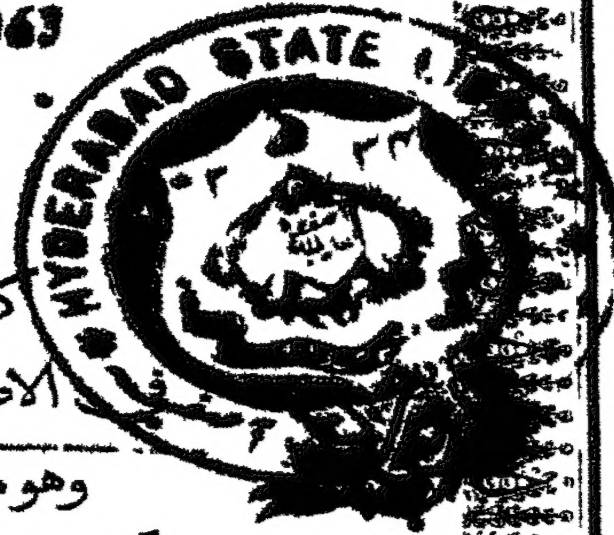


CHECKED - 1963



۲۱۲۰
ریاضی
۲۵۴

کتاب

الاصول الهندسية

وهو مشتمل على

كتب اقليدس الستة

ومضافات في مربع الدائرة

وهندسة الاجسام

واصول قياس المثلثات المستوية والكروية

ترجمة

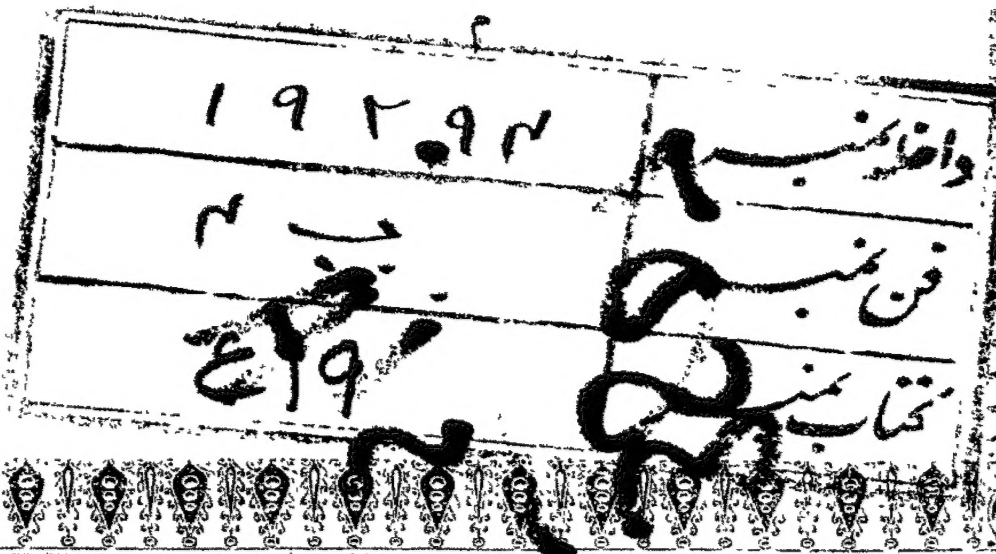
كهريليوش فان ديك

CHECKED

3807
A

مقدمة

الحمد لله الذي لا تحيط بدائرة علمه الاوهام. وهو المنزه عن
مقادير الاشكال ومساحة الاجسام. أما بعد فيقول العبد
الفقير الى ربه القدير كرنيلس فان دَيْك الاميركاني اني
لما رايت افتقار المدارس في هذه البلاد الى الكتب الهندسية
التي بها تتم الفائدة المقصودة منها اعنيت بترجمة هذا
الكتاب المفيد وهو مشتمل على كتب اقليدس الستة
ومضافات اخرى في تربيع الدائرة وهندسة الاجسام
واصول قياس المثلثات المستوية والكروية. والله المسئول
ان ينفع به الطالبين ويفيد الراغبين ويجعله
مخلصاً لوجهه الكريم وهو ارحم
الراحمين



نبذة تاريخية

ان الفيلسوف اقليدس صاحب كتاب الاصول الهندسية عاش في بلاد مصر ق م نحو ٢٨٠ سنة في عصر الملك بطليموس لاغوس. قيل وُلد في الاسكندرية وقيل مولده مجهول وصار معلم العلوم التعليمية في مدرسة الاسكندرية وكثر تلاميذه ومنهم الملك بطليموس نفسه. قيل سألهُ الملك يوماً ألا يوجد سبيل اسهل لمعرفة التعاليم فقال لا توجد سكة سلطانية لذلك. وله مؤلفات في علم الهيئة والبصريات واشهر مؤلفاته الاصول الهندسية ولم تزل الى ايامنا هذه افضل ما صنّف في هذا الفن. غير انه قد دخل عليها بعض التغيرات والنقائص على تماذي الاجيال. وقد رجّعها الى اصلها المعلم سمسون الاسكوتسي ثم اضاف اليها بعض المعلمين عدة قضايا لكي تضير بذلك أكثر مناسبة لحال التعاليم في هذا العصر. واحسن نسخها وأكثرها فائدة النسخة التي اغنى بها المعلم بلايفار الاسكوتسي وهي

المعول عليها في هذه الترجمة

وبالله التوفيق

اصول الهندسة

الكتاب الاول

ايضاح الاصطلاحات والعلامات

- ١ الهندسة علم موضوعه قياس المقادير. والمقدار هو كل ما له واحد من ثلاثة اشياء وهي طول وعرض وعمق
- ٢ قد استعملت في علم الهندسة اصطلاحات شتى كالحد والقضية والاولية والنظرية والعملية والسابقة والتعليلة والفرع وغير ذلك مما سترى
- ٣ الحد هو ايضاح معنى لفظة اصطلاحية. ويجب ان يكون تاماً لا اشكال فيه وان تكون الناطقة المفردة اعنيادية مفهومة
- ٤ الاولية قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاح كقولهم الكل اعظم من جزء
- ٥ النظرية قضية محتاجة الى برهان لاثبات صحتها كقولهم ان الزوايا الثلاث من كل مثلث تعدل قائمتين
- ٦ البرهان المستقيم هو ما اثبت صحة قضية وبُني ايضاً البرهان الايجابي
- ٧ الدهران الغير المستقيم هو ما اثبت صحة قضية باثبات محالية فسادها وبُني ايضاً الدهران السلبي والتحويل الى المحال
- ٨ العملية هي قضية حاوية عملاً مطلوباً انما كقولهم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان نقسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ٩ ~~العملية~~ العملية هو استخراج جوابها. فان عُبِّرَ عن ذلك باعداد سُمي حلاً عددياً او بمبادئ هندسية فهندسية. وان تم بواسطة امتحانات فيمكن ان يكون صناعياً
- ١٠ السابقة قضية استعدادية ذُكرت قبل اخرى لكي يُختصر بها

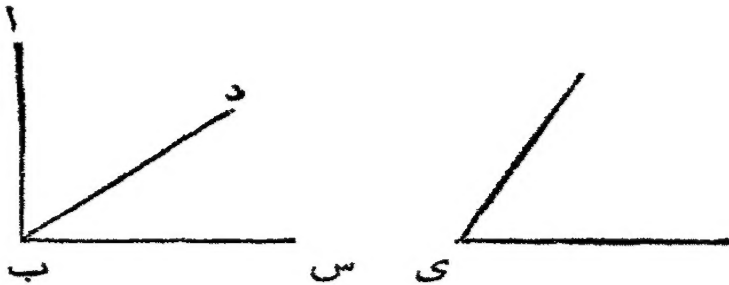
- ١١ الفرع نتيجة تُستنتج بالاستقامة من قضية سابقة لها
- ١٢ التعليقة قول مبنى على قضية سبقتها
- ١٣ الافتراض هو ان يسلم بصحة قضية لكي يبنى عليها برهان قضية اخرى
- ١٤ المقتضيات او الممكنات عمليات يسلم بامكان عملها من اول وهلة
- ١٥ النظام هو صناعة وضع جملة براهين متتابعة على ترتيب ملائيم للبحث عن صحة قضية او فسادها او لبرهانها للغير
- ١٦ التحليل هو استعمال صحة قضية بالتأخر من القضية نفسها الى مبداء معلوم ويسمى ايضا النظام التحليلي وهو المستعمل في علم الجبر والمقابلة
- ١٧ التركيب هو التقدم شيئا فشيئا من مبداء معلوم بسيط الى النتيجة ويسمى ايضا النظام التركيبي وهو المستعمل في علم الهندسة
- ١٨ العلامات المستعملة في هذا الكتاب قد تقدم شرحها في كتاب علم الجبر والمقابلة فعليك بالمراجعة

حدود

- ١ النقطة شيء له وضع فقط وليس له طول ولا عرض ولا عمق
- ٢ الخط طول بدون عرض او عمق
- فرع. نهايتا خطي تقطعان وموضع تقاطع خطين نقطة
- ٣ خطان لا يتوافقان في تقطعين منها بدون ان يتوافقا بالكلية يُسميان مستقيمين. وقيل ايضا الخط المستقيم هو البعد الاقرب بين تقطعين
- فرع. خطان مستقيمان لا يحيطان بمساحة ولا يتطابقان في جزء
- منهما ان لم يتطابقا بالكلية
- ٤ السطح او البسيط ما كان له طول وعرض بدون عمق
- فرع. نهايات سطح خطوط. وموضع تقاطع سطحين خط

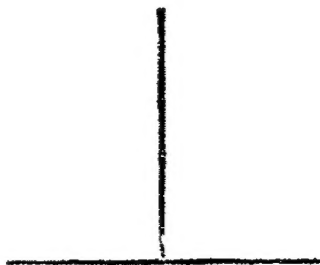
٥ السطح المستوي هو سطح اذا فرضت فيه نقطتان فالخط المستقيم الموصل بينهما يقع جميعه في ذلك السطح

٦ الزاوية المستقيمة البسيطة هي انفراج خطين مستقيمين التقيا بنقطة وليس على استقامة واحدة



تنبيه. متى التقت زاويتان فاكثري نقطة واحدة كما يُرى عند ب فكل واحدة منها تتعين

بثلاثة احرف اوسطها عند راس الزاوية. فالزاوية الواقعة بين خط اب وخط دب تسمى زاوية اب د او دب ا والواقعة بين دب وس ب تسمى دب س او س ب د واما الزاوية المفردة فيدل عليها بحرف واحد كالزاوية عند د



٧ اذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم واحدت زاويتين متساويتين على جانبيه فالخط القائم يسمى عموداً وكل زاوية منها قائمة

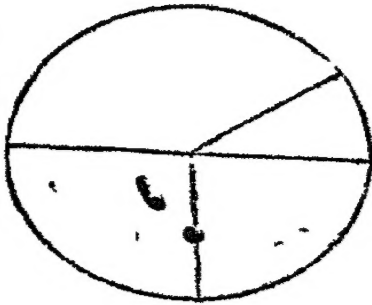
٨ الزاوية المنفرجة هي كل زاوية اكبر من قائمة



٩ الزاوية المنفرجة هي كل زاوية اصغر من قائمة

١٠ الشكل هيئة محدودة. ومساحة الشكل هي الفسحة المنحصرة

في حدوده بدون نظر الى ماهية تلك الحدود



١١ الدائرة شكل مستوي يحيط به خط واحد ويسمى المحيط. وفي وسطه نقطة جميع الخطوط المستقيمة الخارجة منها الى المحيط متساوية

١٢ النقطة المشار اليها تسمى مركز الدائرة

١٣ قطر الدائرة خط مستقيم ماراً بمركزها ونهايتاه في محيطها

١٤ نصف الدائرة هو الشكل المحاط بالقطر والجزء من المحيط

المقطوع بالقطر

١٥ الاشكال المستقيمة الاضلاع هي الحدود بخطوط مستقيمة

١٦ المثلث شكل يحيط به ثلاثة خطوط

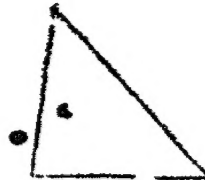
تنبيه. المثلث المستوي هو ما احاط به ثلاثة خطوط مستقيمة

والكروي ما احاط به ثلاثة خطوط منحنية

١٧ ذو الاربعة الاضلاع شكل احاط به اربعة خطوط مستقيمة

١٨ الشكل الكثير الاضلاع ما احاط به اكثر من اربعة

خطوط مستقيمة



١٩ المثلث

المتساوي الاضلاع

هو ما كانت اضلاعه الثلاثة متساوية

٢٠ المثلث المتساوي الساقين هو ما كان ضلعان من اضلاعه

الثلثة متساويين

٢١ المثلث المختلف الاضلاع هو ما كانت اضلاعه الثلثة غير

متساوية

٢٢ المثلث

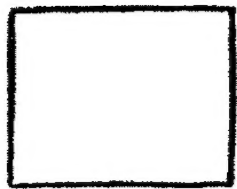


القائم الزاوية هو ما

كانت احدى زواياه قائمة

٢٣ المثلث المنفرج الزاوية هو ما كانت احدى زواياه منفرجة

٢٤ المثلث الحاد الزاوية هو ما كانت زواياه الثلاث حادة



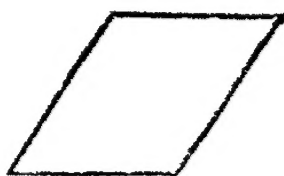
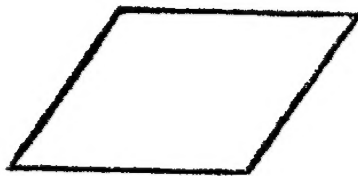
٢٥ المربع شكل يحيط به اربعة

خطوط مستقيمة متساوية وكل زواياه

قائمة

٢٦ المستطيل هو ما كانت كل زواياه قائمة ولكن ليس كل

اضلاعه متساوية



٢٧ المعين ما كانت

اضلاعه متساوية ولكن

ليست فيه قائمة

٢٨ الشبيه بالمعين ما كان ضلعاؤه المتقابلان متساويين وليست

فيه قائمة و اضلاعه الاربعة ليست متساوية

٢٩ كل ذي اربعة اضلاع غير ما ذكر يسمى منحرفا

٣٠ الخطوط المستقيمة المتوازية هي الواقعة في سطح واحد مستو

ولا تلتقي ولو أخرجت في جهتها الى غير نهاية

مقتضيات او إمكانات

- ١ يمكن ان يوصل بين كل نقطتين بخط مستقيم او غير مستقيم
- ٢ يمكن ان يُخَرَجَ خطٌ مستقيم محدود على استقامته في جهتيه الى حدٍّ ما يُراد
- ٣ يمكن ان تُرسم دائرة على اي مركزٍ فرض وعلى اي بُعدٍ فرض منه

اوليات

- ١ الاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض
- ٢ اذا أُضِيفَتْ اشياءٌ متساوية الى اشياءٍ متساوية تكون المجموعات متساوية
- ٣ اذا طُرِحَتْ اشياءٌ متساوية من اشياءٍ متساوية تكون البقايا متساوية
- ٤ اذا اضيفت اشياءٌ متساوية الى اشياءٍ غير متساوية تكون المجموعات غير متساوية
- ٥ اذا طُرِحَتْ اشياءٌ متساوية من اشياءٍ غير متساوية تكون البقايا غير متساوية
- ٦ الاشياء التي هي مضاعفٌ شيء واحد هي متساوية
- ٧ الاشياء التي تعدل نصف شيء واحد هي متساوية
- ٨ المقادير المتطابقة اي التي تملأ مساحة واحدة هي متساوية

٩ الكل اعظم من جزءه.

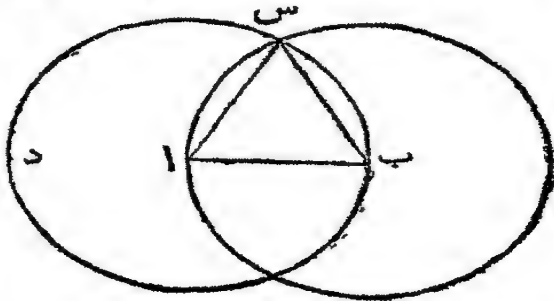
١٠ جميع الزوايا القائمة متساوية

١١ اذا تقاطع خطان مستقيمان لا يكونان موازيين لخط آخر

مستقيم

القضية الاولى. علمية

علينا ان نرسم مثلثاً متساوي الاضلاع على خط مستقيم محدود مفروض
ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلينا ان نرسم عليه مثلثاً متساوي الاضلاع.



اجعل ا مركزاً و ا ب بُعداً وارسم دائرة
ب س د ثم اجعل ب مركزاً و ب ا بُعداً
وارسم دائرة ا س ر (حسب ثلاثة
الممكنات) ثم من س اي نقطة تقاطع
الدائرتين ارسم خطاً الى ا وآخر الى ب

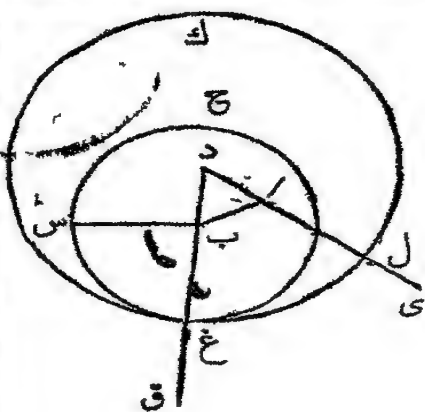
(حسب اولى الممكنات) فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع

فالنقطة ا هي مركز الدائرة ب س د ولذلك الخط ا س يعدل الخط ا ب (حسب
المحد الحادي عشر) وب مركز الدائرة ا س ر ولذلك ب ا يعدل ب س وقد تبرهن
ان ا س يعدل ا ب والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض
(اولية اولى) فلذلك ب س يعدل ا س فالخطوط الثلاثة ا ب ا س ب س هي
متساوية فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع وقد رسم على ا ب وذلك ما كان
علينا ان نعله

القضية الثانية. ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة خطاً مستقيماً يعدل خطاً اخر مستقيماً
مفروضاً

لتكن النقطة المفروضة وب س الخط المستقيم المفروض فعلينا ان نرسم من

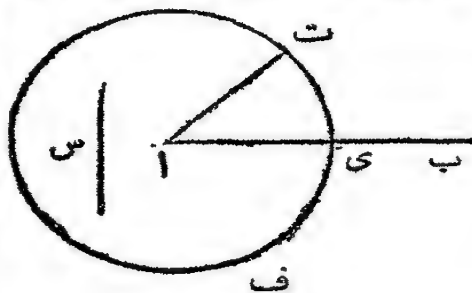


ا خطاً يعدل ب س . من النقطة المفروضة ا رسم
الخط ا ب (اولى المقنضيات) وارسم على ا ب مثلثاً
متساوي الاضلاع ا ب د (حسب ق ا ك ا) ثم
اخرج د ب الى ق ودا الى ي (حسب ثانية
المقنضيات) ثم اجعل ب مركزاً وب س بعداً وارسم
دائرة س غ ح (حسب ثلاثة المقنضيات) واجعل
د مركزاً ود غ بعداً وارسم دائرة غ ل ك فالخط ال
يعدل الخط ب س

النقطة ب هي مركز الدائرة غ س ح ولذلك ب س يعدل ب غ (حدا ا) والنقطة
د هي مركز الدائرة غ ك ل ولذلك الخط د ل يعدل د غ والجزء دا يعدل الجزء د ب
فالبقية ال تعدل البقية ب غ (اولية ثالثة) وقد تبرهن ان ب س يعدل ب غ
والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض فالخط ال يعدل الخط
ب س وقد رُسم من ا النقطة المفروضة وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثالثة . ع

علينا ان تقطع من اطول خطين مستقيمين مفروضين جزءاً يعدل اقصرهما



ليكن ا ب اطول الخطين المفروضين وس
اقصرهما . فعلياً ان تقطع من ا ب جزءاً يعدل
س . ارسم من النقطة ا خطاً ات حتى يعدل س
(حسب ق ٢ ك ا) ثم اجعل ا مركزاً وات بعداً
وارسم دائرة ت ي ف (ثلاثة المقنضيات) فالجزء

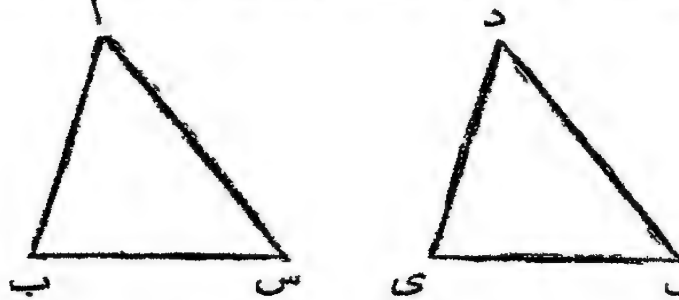
ا ي يعدل ات (حدا ا) وات يعدل س فلذلك ا ي يعدل س (اولية اولى)
وقد قطع من ا ب اطول الخطين المفروضين وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الرابعة . نظرية

اذا عدل ضلعاً مثلث ضلعي مثلث آخر والزاوية الواقعة بين ضلعي

احدها عدلت الواقعة بين ضلعي الآخر فالضلع الثالث من الواحد
يعدل الثالث من الآخر ويكون المثلثان متساويين والزويتان
الاخريان من الواحد تعدلان الاخرين من الآخر

ليكن ا ب س دى ف مثلثين. والضلعان ا ب س من الواحد يعدلان دى دى دى



من الآخر كل واحد يعدل نظيره
والزاوية ب ا س تعدل الزاوية دى
د ف فحينئذ القاعدة ب س تعدل
القاعدة دى ف. والمثلث ا ب س
يعدل المثلث دى ف. وبقيت الزوايا

ايضاً متساوية اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية كل واحدة تعدل نظيرها. اي ا ب
س تعدل دى ف. و ا س ب تعدل دى ف

لانه اذا وُضع المثلث ا ب س على المثلث دى ف حتى تقع النقطة ا على النقطة
د والمخط ا ب على المخط دى فالنقطة ب تقع على النقطة دى لان ا ب يعدل دى.
واذا وقع ا ب على دى فحينئذ ا س يقع على دى ف لان الزاوية ب ا س تعدل الزاوية
دى دى ف والنقطة س تقع على النقطة دى ف لان ا س يعدل دى ف. وقد تبهر ان النقطة
ب تقع على النقطة دى ف القاعدة ب س تقع على القاعدة دى ف وتعدلها (فرع حد ٣)
وكذلك كل المثلث ا ب س يقع على كل المثلث دى ف ويكونان متساويين. والزويتان
الاخريان من الواحد تقع على الاخرين من الآخر. وكل واحدة تعدل نظيرها اي
ا ب س تعدل دى ف و ا س ب تعدل دى ف. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

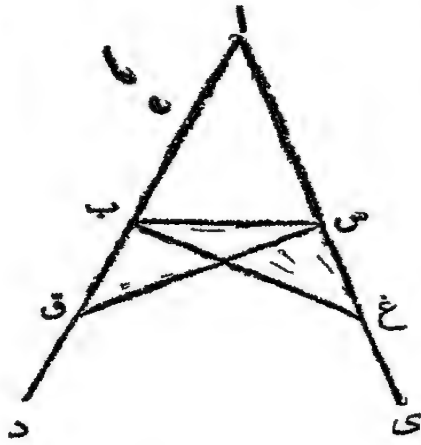
القضية الخامسة. ن

في كل مثلث متساوي الساقين الزاويتان عند القاعدة متساويتان.
واذا أُخرج الضلعان المتساويان فالزاويتان الحادتان على الجانب
الآخر من القاعدة متساويتان ايضاً

ليكن ا ب س مثلثاً متساوي الساقين اي الساق ا ب يعدل الساق ا س. وليخرج

الضلع اب الى د والضلع اس الى ي. فالزاوية اب س تعدل الزاوية اس ب
والزاوية س ب د تعدل الزاوية ب س ي

عين اي نقطة شئت في ب د كالنقطة ق مثلاً. ومن اي اطول خطين اقطع اغ



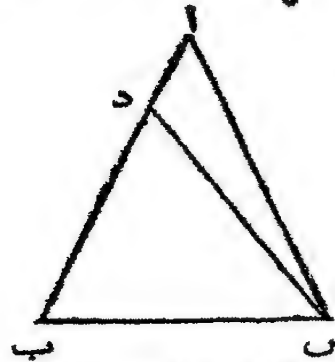
حتى يعدل اق اقصرهما (حسب ق ٢ ك ١) وارسم
الخط ق س والخط غ ب. فالخط اق يعدل اغ
وكذلك اب يعدل اس. فالخطان ق ا اس
يعدلان غ ا اب وبينهما الزاوية ق اغ المشتركة
بين المثلثين اق س اغ ب فالقاعدة ق س
تعدل القاعدة غ ب (حسب ق ٤ ك ١) والمثلث
اق س يعدل المثلث اغ ب فبقية الزوايا من
الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر (ق ٤ ك ١)

كل واحدة تعدل نظيرها اي التي تحاذيها الاضلاع المتساوية اي الزاوية اس ق
تعدل اب غ والزاوية اق س تعدل اغ ب. وقد تقدم ان اق يعدل اغ وان
اب يعدل اس فالبقية ب ق تعدل البقية س غ (اولية ثالثة) وقد تبرهن ان
ق س يعدل غ ب فالضلعان ب ق ق س يعدلان الضلعين س غ غ ب وتبرهن ان
الزاوية ب ق س تعدل الزاوية س غ ب فالمثلث ب ق س يعدل المثلث س غ ب
(ق ٤ ك ١) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر اي التي تقابلها
الاضلاع المتساوية اي الزاوية ق ب س تعدل الزاوية غ س ب والزاوية ب س ق
تعدل الزاوية س ب غ وقد تبرهن ان كل الزاوية اس ق تعدل الكل اب غ وان
الجزء ب س ق يعدل الجزء س ب غ فالبقية اس ب تعدل البقية اب س وهما
الزاويتان عند قاعدة المثلث اب س وقد تبرهن ان الزاوية ق ب س تعدل غ س ب
وهما الزاويتان على الجانب الاخر من القاعدة. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه
فرع. اذ ذاك يكون كل مثلث متساوي الاضلاع متساوي الزوايا ايضا

القضية السادسة. ن

اذا كانت زاويتان من مثلث متساويتين فالضلعان اللذان يقابلانها
هما متساويان ايضا

ليكن $ا ب س$ مثلثاً له زاويتان $ا ب س$ $ا س ب$ متساويتان فضلعاه $ا ب$ $ا س$ هما متساويان ايضاً



والأ فاحدها اطول من الآخر. فلنفرض $ا ب$ اطولها ولنقطع منه جزءاً $د ب$ يعدل $ا س$ اقصرها (ق ٣ ك ١) فلنا في المثلثين $ا ب س$ $ا د ب$ ضلع من الواحد $د ب$ يعدل ضلعاً من الآخر $ا س$ والقاعدة $ب س$ مشتركة بينهما فالضلعان $د ب$ $ب س$ يعدلان $ا س$ $ب س$ كل واحد

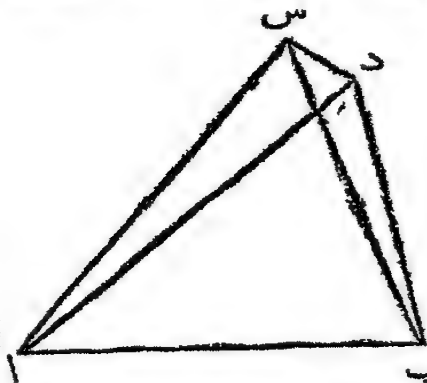
نظيرة. والزاوية $د ب س$ تعدل $ا س ب$ فالقاعدة $د س$ تعدل القاعدة $ا ب$ والمثلث $د ب س$ يعدل المثلث $ا ب س$ (ق ٤ ك ١) اي الصغر يعدل الاكبر وذلك محال فلا يمكن ان يكون $ا ب$ $ا س$ غير متساويين بل هما متساويان. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

فرع. كل مثلث متساوي الزوايا هو متساوي الاضلاع ايضاً

القضية السابعة. ن

لا يكون على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة متساويان والمنتهيان في طرفها الآخر متساويان ايضاً

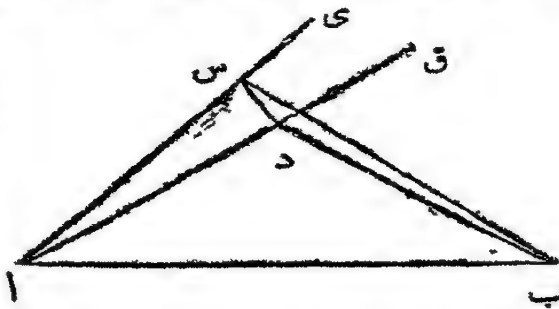
ليكن $ا ب س$ $ا د ب$ مثلثين على قاعدة واحدة $ا ب$ وعلى جانب واحد منها والضلعان $ا س$ $ا د$ المنتهيان في ا متساويان فالمنتهيان في ب الطرف الآخر من القاعدة لا يكونان متساويين



ارسم الخط $س د$ (حسب اولى الممكنات) فاذا كان $ب س$ $ب د$ متساويين وكان راس احد المثلثين خارج الآخر فلما $ا س$ $ا د$ متساويان فالزاوية $ا س د$ تعدل الزاوية $ا د س$ (حسب ق ٥ ك ١) والزاوية $ا س د$ دائماً هي اكبر من الزاوية $ب س د$ فالزاوية $ا د س$ ايضاً اكبر من $ب س د$ وبالاخرى الزاوية $ب د س$ اكبر من $ب س د$ وعلى

ما قُرض ان س ب يعدل د ب فالزاوية ب د س تعدل ب س د (ق ٥ ك ١)
وقد تبرهن انها اكبر من ب س د

ثم اذا وقع راس احد المثلثين مثل د داخل الاخر اس ب . فاخرج اس الى
واخرج ا د الى ق فبا ان اس ا د متساويان فالزاويتان س د ق د س
على الجانب الاخر من القاعدة س د هما متساويتان (ق ٥ ك ١) والزاوية س د
انما هي اكبر من الزاوية ب س د فالزاوية ق د س ايضاً اكبر من ب س د وبالاخرى
ب د س اكبر من ب س د واذا كان ب د ب س متساويين فالزاوية ب د س
تعدل الزاوية ب س د (ق ٥ ك ١)



وقد تبرهن ان ب د س اكبر من
ب س د وذلك محال . وهكذا اذا
وقع راس احد المثلثين بجانب الاخر
فلا يمكن ان يكون على قاعدة واحدة

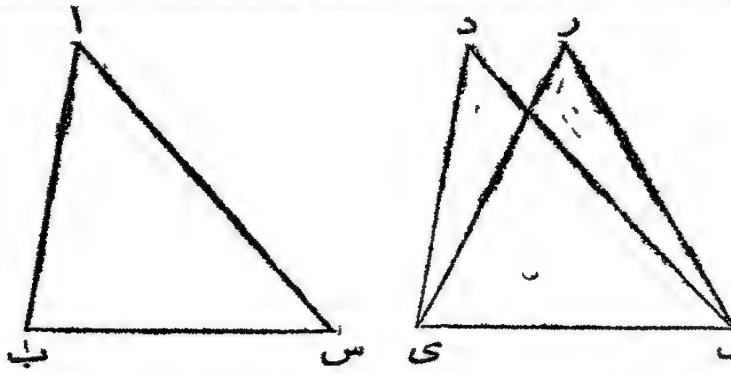
وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان الى طرف واحد من القاعدة
متساويان والمنتهيان الى طرفها الاخر متساويان ايضاً

القضية الثامنة . ن

اذا عدل ضلعاً مثلثٍ ضلعي مثلثٍ آخر وكانت القاعدتان متساويتين
ايضاً فالزاوية الحادثة بين ضلعي الواحد تعدل الحادثة بين ضلعي
الآخر

ليكن ا ب س د ي ف مثلثين والضلعان ا ب اس يعدلان د ي د ف كل
واحد يعدل نظيره . والقاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف فالزاوية ب اس تعدل
الزاوية ي د ف

لانه اذا وضع المثلث ا ب س على المثلث د ي ف حتى تقع النقطة ب على النقطة ي
والخط ب س على الخط ي ف فالنقطة س تقع على النقطة ف لان الخط ب س يعدل

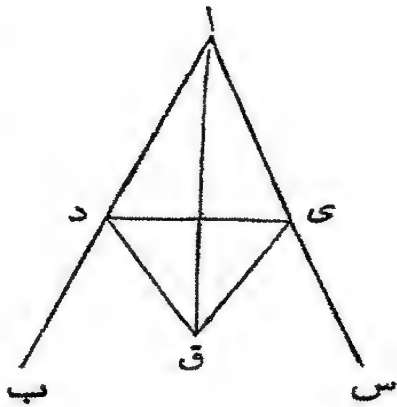


ي ف واذا ذاك فالخط ب ا
يقع على الخط ي د والخط
ا س يقع على د ف والا
فلنفرض وقوعها على ي ر
ر ف فعد ذلك يكون
على قاعدة واحدة وعلى

جانبي واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة
متساويان والمنتهيان في طرفها الاخر متساويان ايضاً وذلك لا يمكن (ق ٧ ك ١)
فاذا طبق ب س على ي ف فالخطان ب ا س يطبقان على ي د د ف والزاوية
ب ا س تطبق على الزاوية ي د ف وتعد لها (اولية ٨) وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

النضية التاسعة. مع

علينا ان ننصف زاوية بسيطة مستقيمة مفروضة اي ان نقسمها الى
قسمين متساويين



ليكن ب ا س الزاوية المفروض ان ننصفها
عين آية نقطة شئت في الخط ا ب كالنقطة د
ومن ا س اطول خطين اقطع جزءاً ا س حتى
يعدل ا د اقصرهما (ق ٢ ك ١) ارسم الخط د ي
وان عليه مثلثاً متساوي الاضلاع د ق س
(ق ١ ك ١) وارسم الخط ا ق فهو ينصف الزاوية
ب ا س

لان الخط ا د يعدل الخط ا ي والخط ا ق

مشارك بين المثلثين د ا ق ي ا ق فالضلعان د ا ا ق يعدلان الضلعين ي ا ا ق
كل واحد يعدل نظيره. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ق ي فالزاوية د ا ق تعدل
الزاوية ي ا ق (ق ٨ ك ١) فقد تنصفت الزاوية ب ا س بالخط ا ق المستقيم وذلك
ما كان علينا ان نعلمه

تعليقة. على هذه الكيفية تنصّف كلا النصفين ذاق ي ا ق وعلى هذا السق
بقسم زاوية مفروضة الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءاً متساوية وهلمّ جزءاً

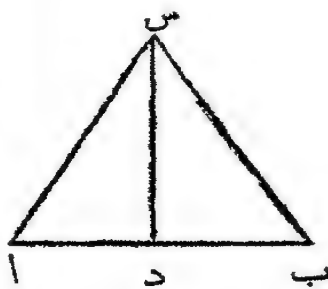
القضية العاشرة. ع

علينا ان ننصّف خطاً مستقيماً محدوداً مفروضاً اي ان نقسمه الى قسمين

متساويين

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض علينا ان

ننصفه



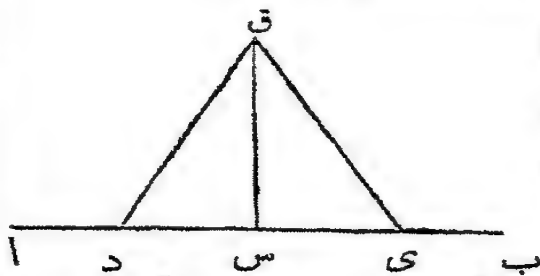
ارسم على الخط ا ب مثلثاً متساوي الاضلاع ا س ب
(ق ١ ك ١) ونصّف الزاوية ا س ب بالخط المستقيم س د
(ق ٢ ك ١) فالخط ا ب قد انصف في النقطة د

فلأنّ الخطّ ا س يعدل س ب والخط س د مشترك بين المثلثين ا س د
ب س د فالضلعان ا س س د يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا س د
تعدل الزاوية ب س د فلذلك القاعدة ا د تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) فقد
انصف الخط ا ب في النقطة د وذلك ما كان علينا ان نعمله

القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم محدود مفروض خطاً

مستقيماً يحدّث مع الاول زاويتين قائمتين



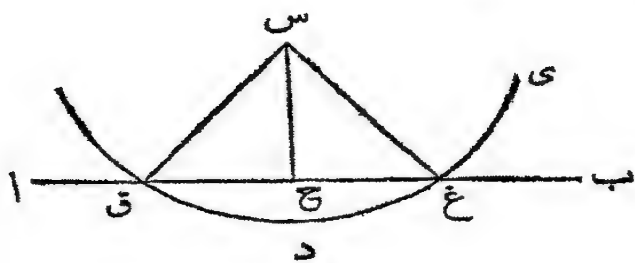
ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس
النقطة المفروضة فيه. فعلياً ان نرسم من
النقطة س خطاً مستقيماً يحدّث مع ا ب
قائمتين

عَيِّنْ اية نقطة شئت في ا س كالنقطة د مثلاً ومن س ب اقطع جزءاً س ي حتى
يعدل س د (ق ٢ ك ١) وعلى د ي ابن مثلثاً متساوي الاضلاع (ق ١ ك ١) د ق ي

ثم ارسم المخطط ق س فهو يحدث مع ا ب قائمتين
 فلان د س يعدل ي س والمخطط ق س هو مشترك بين المثلثين د س ق
 ي س ق فالضلعان د س س ق يعدلان الضلعين ي س س ق كل واحد يعدل
 نظيره. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ي ق فالزاوية د س ق تعدل الزاوية ي س ق
 (ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. واذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم وجعل الزاويتين
 المتواليتين متساويتين فكل واحدة منهما قائمة (حد ٧) فكل واحدة من د س ق
 ي س ق هي قائمة. فقد رُسم من النقطة المفروضة س خط ق س وهو يحدث مع ا ب
 قائمتين وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثانية عشرة. ع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خط مستقيم مفروض غير محدود
 وذلك من نقطة مفروضة خارج ذلك الخط



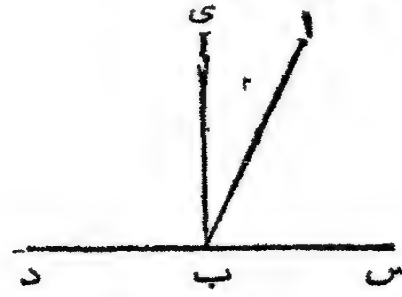
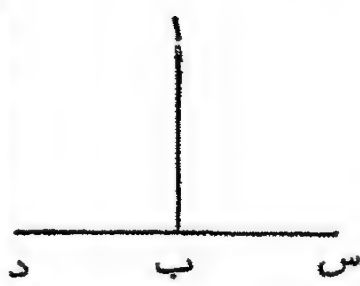
ليكن ا ب خطاً مستقيماً
 يمكن اخراجه الى جهتيه الى غير
 نهاية. وليكن س نقطة خارجة
 فعلينا ان نرسم من س خطاً
 عمودياً على ا ب

عَيِّن اية نقطة شئت على الجانب الاخر من ا ب مثل د ثم اجعل س مركزاً
 وس د بعداً وارسم الدائرة ي غ ق (ثلاثة المكات) التي تقطع ا ب في النقطتين غ
 وق. نصف ق غ في ح (ق ١٠ ك ١) ثم ارسم س ح فهو عمودي على ا ب. ارسم
 س ق س غ ولان ق ح يعدل ح غ والمخطط س ح مشترك بين المثلثين ق ح س
 غ ح س فالضلعان ق ح ح س يعدلان الضلعين غ ح ح س كل واحد يعدل
 نظيره. والقاعدة س ق تعدل القاعدة س غ (حد ١) فالزاوية ق ح س تعدل
 الزاوية غ ح س (ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. فالمخطط س ح عمودي على ا ب (حد ٧)
 وقد رُسم من النقطة المفروضة س وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثالثة عشرة . ن

الزاويتان الحادثتان من وقوع خط مستقيم على آخر مستقيم على جانب واحد منه قائمتان او تعدلان قائمتين

ليقع الخط المستقيم ا ب على الخط المستقيم د س حتى تحدث الزاويتان ا ب د ا ب س فهما قائمتان او تعدلان قائمتين



فاذا كان ا ب د
ا ب س متساويتين
فهما قائمتان (حد ٧)
ولا فمن النقطة ب
ارسم الخط ب ي

عمودياً على د س (ق ١١ ك ١) فالزاويتان ي ب د ي ب س قائمتان والزاوية
س ب ي تعدل س ب ا مع ا ب ي اضعف الى كل واحدة منهما الزاوية ي ب د
فالزاويتان س ب ي ي ب د تعدلان الثلاث زوايا س ب ا ا ب ي ي ب د
(اولية ٢) والزاوية د ب ا تعدل د ب ي مع ي ب ا اضعف الى كل واحدة منهما ا ب س
فالزاويتان د ب ا ا ب س تعدلان الثلاث د ب ي ي ب ا ا ب س وقد تبرهن
ان د ب ي س ب ي تعدل هذه الثلاث زوايا ايضاً. والاشياء المساوية لشيء واحد
هي متساوية بعضها لبعض (اولية ١) اي الزاويتان س ب ي د ب ي تعدلان
الزاويتين د ب ا ا ب س ولكن س ب ي ي ب د هما قائمتان فالزاويتان د ب ا
ا ب س تعدلان قائمتين

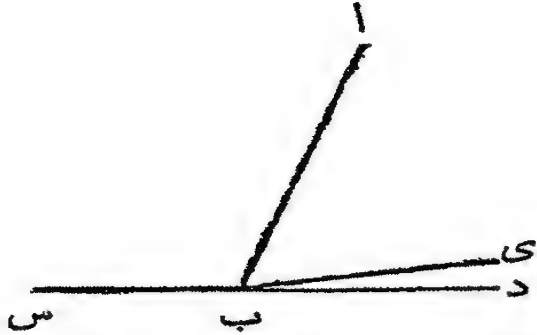
فرع . مجتمع جميع الزوايا الحادثة على جانب واحد من د س يعدل قائمتين لانه
يعدل مجتمع المتواليتين د ب ا ا ب س

القضية الرابعة عشرة . ن

اذا وقع خطان مستقيمان على نقطة واحدة من خط آخر مستقيم عن

جانبه واحدا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين فالخطان على استقامة واحدة كأنهما خط واحد

ليقع خطان س ب ب د على النقطة ب من الخط ا ب من جانبه وليحدثا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين ا ب س ا ب د فالخطان س ب ب د على استقامة واحدة كأنهما خط واحد

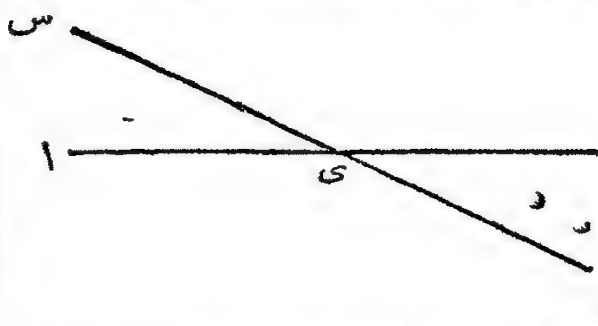


والا فارسم ب ي حتى يكون س ب ب ي على استقامة واحدة فالخط المستقيم ا ب الواقع على خط اخر مستقيم س ي على جانب واحد منه يحدث زاويتين ا ب س ا ب ي تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١)

ولكن قد فرض ان ا ب س ا ب د تعدلان قائمتين فالزاويتان ا ب س ا ب ي تعدلان ا ب س ا ب د اطرح الزاوية المشتركة ا ب س فالباقية ا ب ي تعدل الباقية ا ب د (اولية ٢) اي الجزء يعدل الكل وذاك محال فلا يمكن ان يكون س ب ب ي على استقامة واحدة. وهكذا في كل خط غير ب د فالخطان س ب ب د الحدتان مع ا ب زاويتين تعدلان قائمتين هما على استقامة واحدة وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

القضية الخامسة عشرة. ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان فالزوايا المتقابلة متساوية



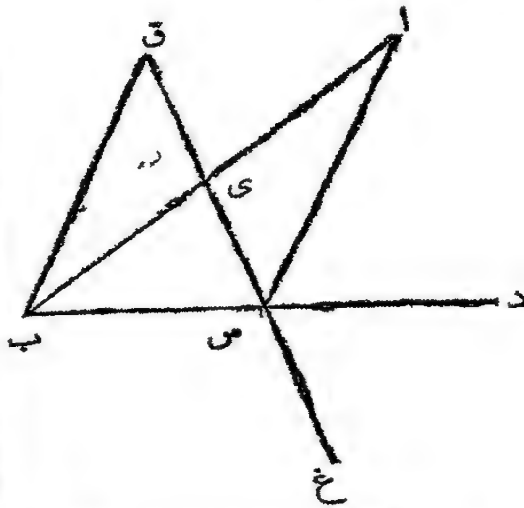
ليكن ا ب خطا مستقيما وليقطعه خط آخر س د في النقطة ي فالزاوية س ي ا تعدل ب ي د والزاوية س ي ب تعدل ا ي د لان الزاويتين س ي ا ا ي د

المحادثتين من وقوع ا ي على س د تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) و ا ي د د ي ب المحادثتان من وقوع د ي على ا ب ايضا تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان

س ا اى د تعدلان اى د دى ب اطرح المشتركة اى د فالباقية سى ا تعدل
الباقية دى ب (اولية ٢) وهكذا ايضا يبرهن ان سى ب تعدل اى د
فرع اول. يتضح من هذه القضية ان مجتمع جميع الزوايا الحادثة من تقاطع
خطين مستقيمين يعدل اربع زوايا قائمة
فرع ثان. مجتمع الزوايا الحادثة من تقاطع خطوط مستقيمة في نقطة واحدة يعدل
اربع زوايا قائمة

القضية السادسة عشرة . ن

اذا اُخرج ضلع من مثلث فالزاوية الخارجة الحادثة من ذلك هي اكبر
من احدى الداخلتين المتقابلتين

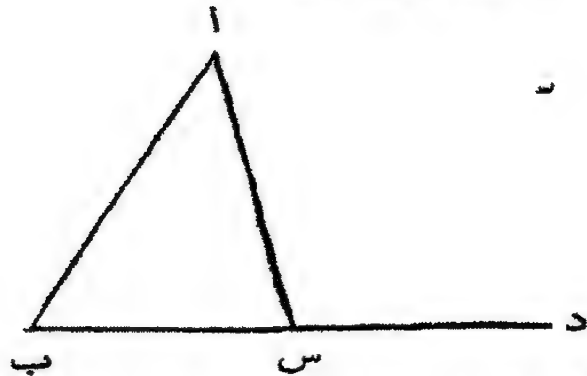


ليكن ق ب س مثلثا وليخرج الضلع
ب س الى د فالزاوية الخارجة ق س د هي
اكبر من احدى الداخلتين المتقابلتين
س ب ق ب ق س
نصف ق س في ي (ق ١٠ ك ١)
ارسم ب ي واخرجه الى ا واجعل ي ا
حتى يعدل ب ي (ق ٢ ك ١) ارسم اس
واخرج ق س الى غ

فالآن قى يعدل سى وبى يعدل اى فالخطان قى بى يعدلان
اى سى س كل واحد يعدل نظيرة. والزاوية قى بى تعدل اى سى (ق ١٥ ك ١)
فالقاعدة قى بى تعدل القاعدة اس (ق ٤ ك ١) والمثلث قى بى يعدل المثلث
اى سى ونقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر. يعني التي تقابلها
الاضلاع المتساوية فالزاوية بى قى تعدل الزاوية سى س ا والزاوية سى س د او
ق س د هي اكبر من سى س ا فهي ايضا اكبر من بى قى او بى قى س وعلى هذا
النسبة اذا نُصِف ب س يبرهن ان الزاوية ب س غ او ق س د (ق ١٥ ك ١)
هي اكبر من قى ب س

القضية السابعة عشرة. ن

زاويتان من مثلث هما معاً اصغر من قائمتين



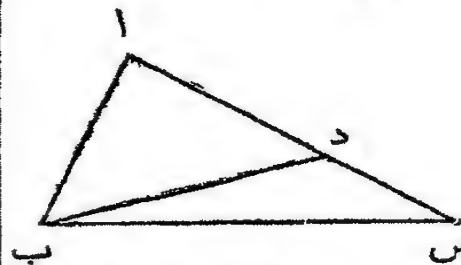
ليكن اب س مثلثاً فزاويتان منه
معاً اصغر من قائمتين

اخرج ب س الى د فالزاوية
الخارجة اس د هي اكبر من الداخلة
اب س (ق ١٦ ك ١) اصف الى كل
واحدة منها اس ب فالزاويتان اس د

اس ب معاً اكبر من اب س اس ب معاً ولكن اس د اس ب معاً تعدلان
قائمتين (ق ١٣ ك ١) واذا ك فالزاويتان اب س اس ب معاً اصغر من قائمتين.
وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان اب س اس ب معاً و اب س اب س معاً اصغر
من قائمتين

القضية الثامنة عشرة. ن

الضلع الاطول من كل مثلث تقابله الزاوية الكبرى

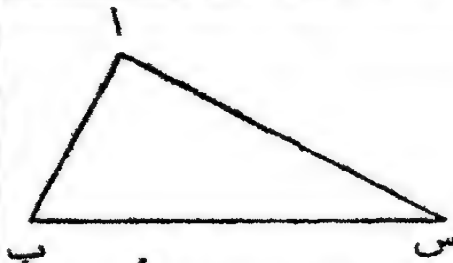


ليكن اب س مثلثاً وليكن الضلع اس اطول
من الضلع اب فتكون الزاوية اب س اكبر
من الزاوية ب س ا

من اس اقطع ا د حتى يعدل اب (ق ١٦ ك ١) وارسم ب د ففي المثلث ب د س الزاوية الخارجة ا د ب هي اكبر من الداخلة
د س ب ولكن ا د ب تعدل اب (ق ١٥ ك ١) فالزاوية اب د ايضاً اكبر من
د س ب وبالاخرى اب س اكبر من د س اي اب س ب

القضية التاسعة عشرة. ن

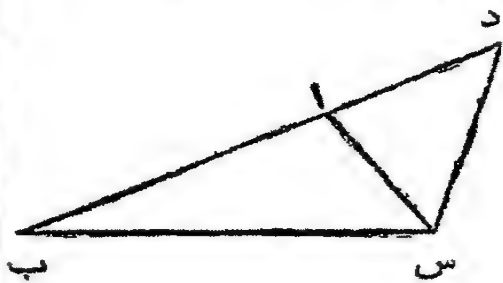
الزاوية الكبرى من كل مثلث يقابلها الضلع الاطول



ليكن $اب$ $س$ مثلثا ولتكن الزاوية $اب$ $س$
أكبر من $اس$ $ب$ فيكون الضلع $اس$ أطول من
 $اب$ وإلا فالضلع $اس$ يعدل $اب$ أو هو أقصر
منه ولا يمكن أن يعدل $اب$ لانه عند ذلك
كانت الزاويتان $اس$ $ب$ $اب$ $س$ متساويتين (ق ٥ ك ١) وقد فُرض أن $اب$ $س$ أكبر
من $اس$ $ب$ ولو كانت أقصر لكانت $اب$ $س$ أصغر من $اس$ $ب$ (ق ١٨ ك ١)
فبالضرورة يكون $اس$ أطول من $اب$

القضية العشرون ن

ضلعان من مثلث هما معا أطول من ضلعه الثالث



ليكن $اب$ $س$ مثلثا فضلعان منه معا
أطول من ضلعه الثالث. أي الضلعان
 $ب$ $اس$ معا أطول من $ب$ $س$ و $اب$
 $ب$ $س$ معا أطول من $اس$ و $ب$ $س$ $ا$
معا أطول من $اب$

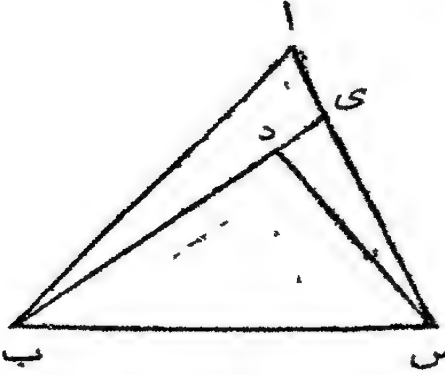
أخرج $ب$ $ا$ الى $د$ واجعل $اد$ يعدل $اس$ (ق ٢ ك ١) وارسم $د$ $س$ فبا
أن $اد$ يعدل $اس$ فالزاوية $اد$ $س$ تعدل $اس$ $د$ (ق ٥ ك ١) و $ب$ $س$ $د$ هي
أكبر من $اس$ $د$ فهي ايضا أكبر من $اد$ $س$ فيكون الضلع $ب$ $د$ أطول من $ب$ $س$
(ق ١٩ ك ١) ولكن $ب$ $د$ يعدل $ب$ $ا$ مع $اس$ فالضلعان $ب$ $ا$ $اس$ معا هما أطول
من $ب$ $س$ وهكذا في كل ضلعين من المثلث

تعليقة. يبرهن ذلك بدون اخراج ضلع من المثلث لأن $ب$ $س$ هو البعد
الأقرب بين النقطة $ب$ والنقطة $س$ فيكون $ب$ $س$ أقصر من $ب$ $ا$ $اس$ أي $ب$ $ا$
 $اس$ معا أطول من $ب$ $س$

القضية الحادية والعشرون ن

إذا رُسم من طرفي ضلع مثلث خطان مستقيمان الى نقطة داخل المثلث

فهما أقصر من ضلعي المثلث الآخرين ولكن يحيطان بزاوية أكبر من التي بين الآخرين

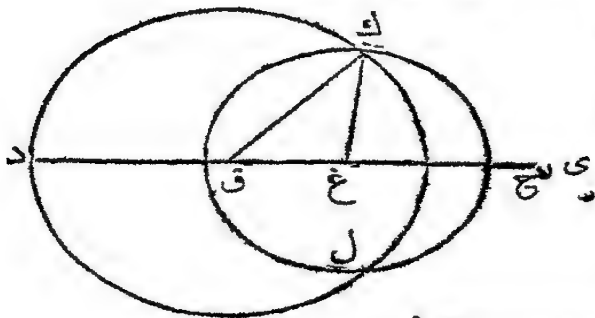


ليكن ا ب س مثلثاً، وليرسم من طرفي ب س خطان الى النقطة د داخل المثلث مثل ب د س د فهما أقصر من ب ا س ولكن الزاوية ب د س هي أكبر من ب ا س. اخرج ب د الى ي. فالضلعان ب ا ي معاً من المثلث ب ا ي هما أطول من ب ي (ق ٢٠ ك ١) اصف

لها ي س فالضلعان ب ا س أطول من ب ي ي س وفي المثلث س ي د الضلعان س ي ي د هما معاً أطول من س د. اصف لها د ب فالضلعان س ي ب معاً أطول من س د د ب. وقد تبرهن ان ب ا س هما معاً أطول من ب ي س فبإلا حري ب ا س أطول من ب د د س ثم الزاوية الخارجة ب د س من المثلث س د ي هي أكبر من الداخلة س ي د (ق ١٦ ك ١) ولذات هذا السبب س ي د هي أكبر من ي ا ب ا ب وس ا ب وقد تبرهن ان س د ب هي أكبر من س ي ب فبإلا حري هي أكبر من س ا ب

القضية الثانية والعشرون ع

علينا ان نرسم مثلثاً اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة وكل اثنين منها معاً أطول من الثالث



ليكن ا ب وس الخطوط المستقيمة المفروضة كل اثنين منها معاً أطول من الثالث. فعلياً ان نرسم مثلثاً اضلاعه تعدل هذه الخطوط الثلاثة خذ خطاً مستقيماً ينتهي في نقطة د

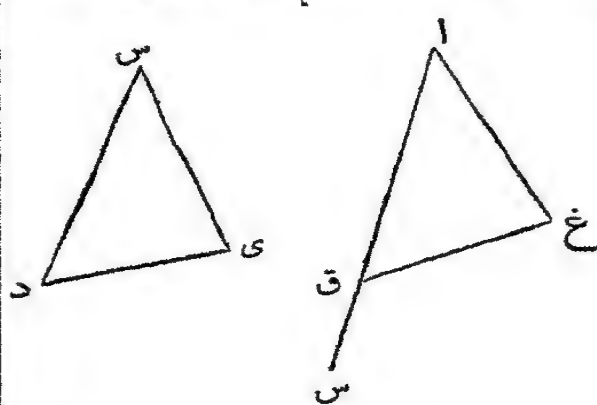
وغير محدود من جهة ي واقطع منه د ق حتى يعدل ا (ق ٢ ك ١) وق غ حتى

يعدل ب و غ ح حتى يعدل س ثم اجعل ق مركزاً وق د بعداً (ثلاثة الممكنات)
وارسم دائرة د ك ل واجعل غ مركزاً و غ ح بعداً وارسم دائرة ك ح ل (ثلاثة الممكنات)
ومن ك اي نقطة تقاطع الدائرتين ارسم ك ق ك غ فالمثلث ق ك غ هو المطلوب
واضلاعه تعدل الخطوط الثلاثة المفروضة ا و ب و س. فقد جعلنا ق غ حتى يعدل
ب ومن حيث ان النقطة ق هي مركز الدائرة د ك ل فالخط ق ك يعدل ق د
(حد ١١) ولكن ق د يعدل ا فالخط ق ك يعدل ا ايضاً. ومن حيث ان النقطة
غ هي مركز الدائرة ك ح ل فالخط غ ح يعدل غ ك (حد ١١) ولكن غ ح يعدل
س ولذلك غ ك يعدل س ايضاً فقد رُسم مثلث اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط
مستقيمة مفروضة

تعليقة. لو كان احد الاضلاع اطول من مجتمع الآخرين لما تقاطعت الدائرتان
والقضية صحيحة كل ما كان مجتمع ضلعين اطول من الثالث

القضية الثالثة والعشرون. ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم مفروض زاوية
مستقيمة بسيطة حتى تعدل زاوية اخرى مستقيمة بسيطة مفروضة

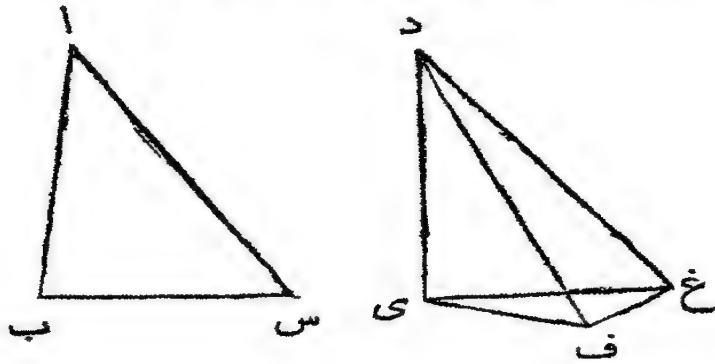


ليكن ا س الخط المستقيم
المفروض و النقطة المفروضة منه
ود س ي الزاوية البسيطة المفروضة
فعلينا ان نرسم من النقطة ا زاوية
بسيطة تعدل د س ي. في س د
عين اية نقطة شئت مثل د. كذلك
عين ي في س ي. ارسم د ي وارسم

المثلث ا ق غ حتى يعدل المثلث س ق د (ق ٢٢ ك ١) اي الضلع ا ق يعدل
س د والضلع ا غ يعدل س ي والضلع ق غ يعدل د ي فبما ان الضلعين ق ا
ا غ يعدلان د س س ي والقاعدة ق غ تعدل القاعدة د ي فالزاوية ق ا غ تعدل
الزاوية د س ي (ق ٨ ك ١) وقد رُسمت من النقطة ا في الخط المفروض ا س

القضية الرابعة والعشرون

في مثلثين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين من الاخر وكانت الزاوية المحاذية بين ضلعي الاول اكبر من المحاذية بين ضلعي الاخر فنلذي له الزاوية الكبرى له ايضاً القاعدة الطولى

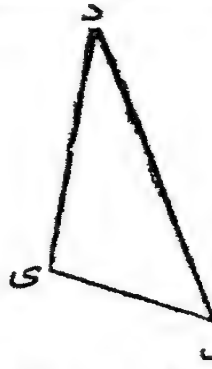
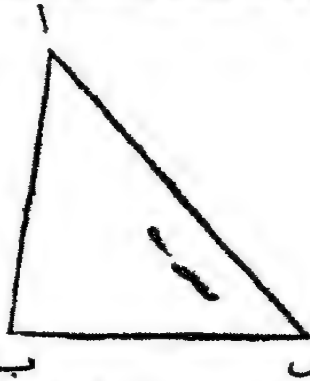


ليكن ا ب س د ي ف
مثلثين ولنفرض ان الضلع
ا ب يعدل د ي والضلع ا س
يعدل د ف ولكن الزاوية
ب ا س اكبر من ي د ف
فتكون القاعدة ب س اطول
من القاعدة ي ف

ليكن د ف اطول من د ي ومن النقطة د ا رسم الزاوية ي د غ حتى تعدل
ب ا س (ق ٢٢ ك ١) واجعل د غ حتى يعدل ا س او د ف ا رسم ي غ ف غ
فمن حيث ان ا ب يعدل د ي و ا س يعدل د غ والزاوية ب ا س تعدل
ي د غ فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ي غ (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان د ف يعدل
د غ فالزاوية د ف غ تعدل د غ ف (ق ٥ ك ١) ولكن الزاوية د غ ف هي اكبر من
ي غ ف فتكون د ف غ ايضاً اكبر من ي غ ف فكم بالاحرى تكون ي غ ف غ اكبر
من ي غ ف وفي المثلث ي غ ف فمن حيث ان الزاوية ي غ ف هي اكبر من ي غ
ف فيكون الضلع ي غ اطول من ي ف (ق ١٩ ك ١) ولكن ي غ يعدل ب س
فالقاعدة ب س اطول من القاعدة ي ف

القضية الخامسة والعشرون

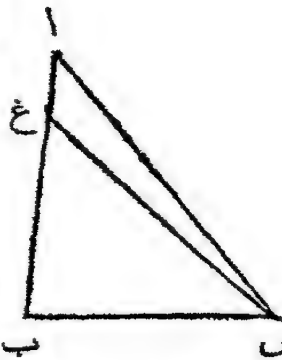
اذا عدل ضلعاً مثلث ضلعي مثلث آخر ولكن كانت قاعدة احدها
اطول من قاعدة الآخر فالزاوية الكبرى هي لذي القاعدة الطولى



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
ولنفرض ان ضلعين من الواحد ا ب
ا س عدلا ضلعين من الاخر د ي
د ف ولكن القاعدة ب س اطول من
القاعدة ي ف فتكون الزاوية ب ا س
اكبر من الزاوية ي د ف والا فاما ان
تعد لها او تكون اصغر منها فالزاوية ب ا س لا تعدل ي د ف لانه عند ذلك كانت
القاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف (ق ٤ ك ا) وقد فرض ب س الاكبر ولا يمكن
ان تكون اصغر منها لانه عند ذلك كانت القاعدة ب س اصغر من ي ف (ق ٢٤
ك ا) وقد فرض ب س اكبر وقد تبهرن انها لا تعدلها فبالضرورة تكون الزاوية
ب ا س اكبر من الزاوية ي د ف

القضية السادسة والعشرون

اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر اي كل واحدة
عدلت نظيرها. وضلع من الواحد عدل ضلعا من الآخر ان كانا
المتواليين للزاويا المتساوية او المتقابلين لها فالضلعان الاخران من
الواحد يعدلان الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل
الثالثة من الآخر



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
والزاوية ا ب س فلتعدل د ي ف
والزاوية ب س ا فلتعدل ي ف د
والضلع ب س فليعدل ي ف وها
المتواليان للزاويا المتساوية
فالضلعان الاخران من الواحد ف
ا ب ا س يعدلان الاخرين من الاخر د ي د ف والزاوية الثالثة من الواحد

ب ا س تعدل الثالثة من الاخرى د ف
وان لم يكن ا ب و دى متساويين فيا لضرورة يكون احدهما اطول من الاخر
فلنفرض ا ب الاطول ولنفصل منه ب غ حتى يعدل دى (ق ٢ ك ١) ولنرسم غ س
فمن حيث ان غ ب يعدل دى وب س يعدل دى ف فالضلعان غ ب ب س
يعدلان الضلعين دى دى ف كل واحد يعدل نظيره والزاوية غ ب س تعدل
دى ف فالقاعدة غ س تعدل القاعدة د ف (ق ٤ ك ١) والمثلث غ ب س يعدل
المثلث دى ف وبقيّة الزوايا من الواحد تعدل بقيّة الزوايا من الاخر كل واحدة
تعدل نظيرها اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزاوية غ س ب تعدل دى
وقد فرض ان دى ف تعدل ا س ب فالزاوية غ س ب ايضا تعدل ا س ب اي
الصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ا ب و دى غير متساويين
اي هما متساويان وب س يعدل دى ف فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين
دى دى ف والزاوية ا ب س تعدل دى ف فالقاعدة ا س تعدل القاعدة د ف
(ق ٤ ك ١) والزاوية ب ا س تعدل الزاوية دى ف

ثم لفرض مساواة الضلعين اللذين يقابلان الزوايا المتساوية في كلا المثلثين
يعني ان ا ب يعدل دى ف على هذا المفروض ايضا لنا مساواة بقيّة الاضلاع يعني
ا س يعدل دى ف وب س يعدل دى ف والزاوية الثالثة من الواحد ب ا س

تعدل الثالثة من الاخرى د ف

فان لم يكن ب س وي ف

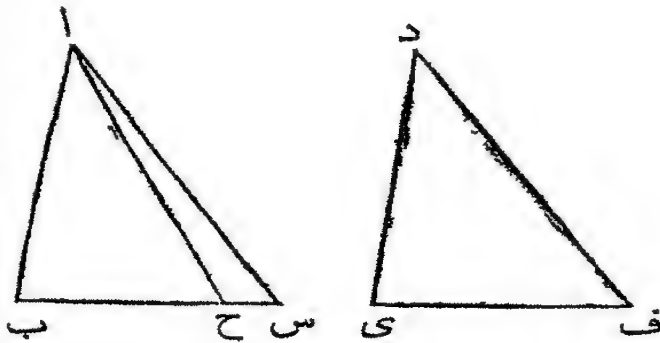
متساويين فليكن ب س اطولها.

افصل منه ب ح حتى يعدل دى

ف (ق ٢ ك ١) وارسم ا ح فمن

حيث ان ب ح يعدل دى ف وا

ب يعدل دى ف فالضلعان ا ب

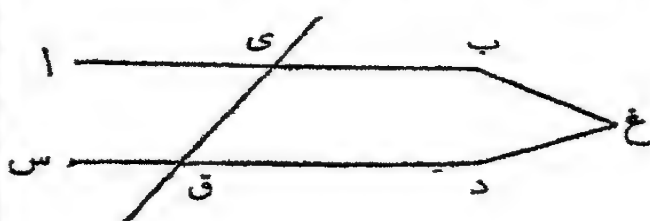


ب ح يعدلان الضلعين دى دى ف والزاوية ا ب ح تعدل دى ف فالقاعدة ا ح
تعدل القاعدة د ف (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب ح يعدل المثلث دى ف وبقيّة
الزوايا ايضا متساوية اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية فالزاوية ب ح ا تعدل
دى ف ولكن دى ف د تعدل ب س ا فالزاوية ب س ا تعدل ب ح ا اي الزاوية

المحارجة اح ب تعدل الداخلة المتقابلة اس ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١) فلا
يمكن ان يكون ب س وى ف غير متساويين اي هما متساويان و اب يعدل دى
فالضلعان اب ب س يعدلان دى وى ف والزاوية اب س تعدل دى ف
فالقاعدة اس تعدل القاعدة د ف والزاوية الثالثة ب اس تعدل الثالثة دى د ف

القضية السابعة والعشرون

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين آخرين مستقيمين وجعل الزاويتين
المتبادلتين متساويتين فالخطان متوازيان

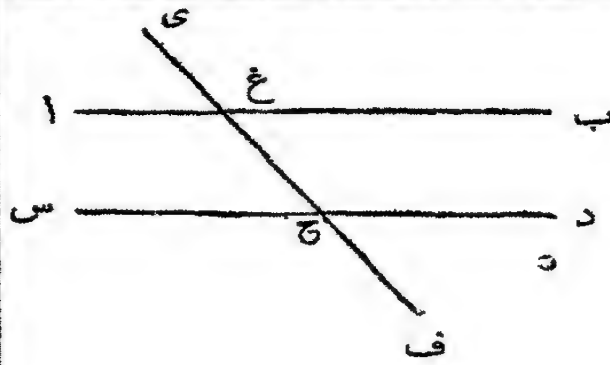


ليقع الخط المستقيم وى ق على
الخطين المستقيمين اب س د
وليجعل معهما الزاويتين المتبادلتين
اى وى ق د متساويتين فالخطان
اب س د متوازيان

والا فيلتقيان اذا اخرجنا. فلنفرض النقطة هـ في النقطة غـ فيكون وى ق مثلثا
وزاوية المحارجة اى ق تكون اكبر من الداخلة المتقابلة وى ق غـ (ق ١٦ ك ١) وقد
فرض مساوئها فلا تكون احداها اكبر من الاخرى فلا يلتقي اب وس د اذا اخرجنا
الى جهة ب ود وهكذا يبرهن انها لا يلتقيان اذا اخرجنا الى جهة ا وس فهما اذا
متوازيان (حد ٣٠)

القضية الثامنة والعشرون

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين مستقيمين واحدا زاوية خارجة
تعدل الداخلة المتقابلة على جانب واحد منه او داخلتين على جانب
واحد منه تعدلان معا قائمتين فالخطان متوازيان

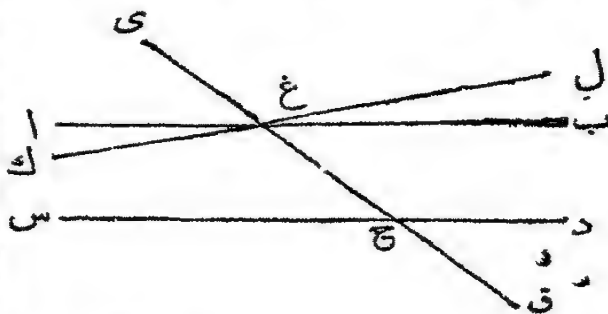


ليقع الخط المستقيم EF على
الخطين المستقيمين AB و CD وليجعل
معهما الزاوية الخارجة $\angle EGB$ ان
تعدل الداخلة المتقابلة على ذلك
الجانب $\angle EHD$ او ليجعل الداخلتين
على جانب واحد $\angle EGB$ و $\angle EHD$ ان

تعدلا قائمتين فالخطان AB و CD متوازيان. فمن حيث ان $\angle EGB$ تعدل $\angle EHD$ و
تعدل ايضا $\angle EGB$ (ق ١٥ ك ١) فالزاوية $\angle EGB$ تعدل $\angle EHD$ و هما متبادلتان
ولذلك (ق ٢٧ ك ١) AB و CD يوازيان و ايضا من حيث ان $\angle EGB$ و $\angle EHD$ تعدلان
قائمتين حسب المفروض و $\angle EGB$ و $\angle EHD$ تعدلان قائمتين (ق ١٣ ك ١) فالزاويتان
 $\angle EGB$ و $\angle EHD$ تعدلان $\angle EGB$ و $\angle EHD$ اطرح المشتركة $\angle EGB$ فالباقية $\angle EHD$
تعدل الباقية $\angle EGB$ و هما متبادلتان. ولذلك AB و CD متوازيان
فرع. اذا ان كان خطان مستقيمان عموديين على خط مستقيم ثالث فهما متوازيان

القضية التاسعة والعشرون.

اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين متوازيين فالزاويتان
المتبادلتان الحادتان متساويتان والزاوية الخارجة تعدل الداخلة
المتقابلة على جانب واحد والداخلتان على جانب واحد تعدلان قائمتين



ليقع الخط المستقيم EF على
المتوازيين AB و CD فالزاويتان
المتبادلتان $\angle EGB$ و $\angle EHD$
متساويتان والخارجة $\angle EGB$
تعدل الداخلة المتقابلة على ذلك

الجانب $\angle EHD$ و الداخلتان على جانب واحد $\angle EGB$ و $\angle EHD$ تعدلان قائمتين
فان لم تكن $\angle EGB$ و $\angle EHD$ متساويتين فليبرسم الخط EF حتى ان $\angle EGB$ تعدل
 $\angle EHD$ و اخرج EF الى AB فالخط EF يوازي AB (ق ٢٧ ك ١) و AB ايضا

بوازي س د فقد رسم خطان مستقيمان ماران بنقطة واحدة غ بوازيان س د من غير ان بتطابقا وذلك محال (اولية ١١) فلا تكون الزاويتان ا غ ح غ ح د غير متساويتين اي هما متساويتان. والزاوية ي غ ب تعدل ا غ ح (ق ١٥ ك ١) ولذلك ي غ ب ايضا تعدل غ ح د (اولية اولى) اضف اليهما ب غ ح فالزاويتان ي غ ب ب غ ح تعدلان ب غ ح غ ح د ولكن ي غ ب ب غ ح تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) ولذلك ب غ ح غ ح د تعدلان قائمتين ايضا

فرع اول. اذا جعل المخطان ك ل س د مع ي ق الزاويتين ك غ ح غ ح س معا اصغر من قائمتين فالخطان ك غ س ح يلتقيان على ذلك الجانب من ي ق الذي فيه كانت الزاويتان اصغر من قائمتين

والا فهما متوازيان. او يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ي ق ولكنهما غير متوازيين. والا لكانت ك غ ح غ ح س معا تعدلان قائمتين ولا يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ي ق والا لكانت ل غ ح غ ح د زاويتين من زوايا مثلث واصغر من قائمتين وذلك لا يمكن لان الاربع زوايا ك غ ح ح غ ل س ح غ غ ح د تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٢ ك ١) واثنان منها اي ك غ ح غ ح س ها بالمفروض اصغر من قائمتين فبالضرورة الاخريان ل غ ح غ ح د اكبر من قائمتين فمن حيث ان ك ل س د غير متوازيين ولا يلتقيان من جهة ل و د فبالضرورة يلتقيان اذا اخرجنا الى جهة ك و س

فرع ثان. اذا كان ب غ ح قائمة تكون غ ح د ايضا قائمة فالخط العمودي على احد خطين متوازيين هو عمودي على الاخر ايضا

فرع ثالث. من حيث ان ا غ ي = ب غ ح و د ح ق = س ح غ تكون الاربع الزوايا المحاذية ا غ ي ب غ ح س ح غ د ح ق متساوية. وهكذا الاربع الزوايا المنفرجة ي غ ب ا غ ح غ ح د س ح ق هي ايضا متساوية. واذا اضيفت احدى الحاديات الى احدى المنفرجات فالمجموع يعدل قائمتين

تعليقة. الزوايا المذكورة لها اسماء مختلفة باعتبار نسبة بعضها الى بعض فالزاويتان ب غ ح غ ح د هما الداخلتان على جانب واحد وكذلك ا غ ح غ ح س. والزاويتان ا غ ح غ ح د هما الداخلتان المتبادلتان او المتبادلتان فقط. وكذلك ب غ ح غ ح س. والزاويتان ي غ ب غ ح د هما الخارجة والداخلية وكذلك ي غ ا غ ح س

والزاويتان ي غ ب س ح ق هما الخارجتان المتبادلتان وكذلك ا غ ي د ح ق

القضية الثلثون . ن

الخطوط المستقيمة المتوازية للخط واحد مستقيم هي متوازية بعضها لبعض

ليكن الخطان ا ب س د متوازيين
للخط ي ف هما متوازيان ايضاً
ليقع على ا ب ي ف س د الخط ف
المستقيم غ ح ك فمن حيث ان ا ب ي ف
متوازيان فالزاوية ا غ ح تعدل الزاوية

غ ح ف (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ي ف س د متوازيان فالزاوية غ ح ف
تعدل غ ح د (ق ٢٩ ك ١) وقد تبهرن ان ا غ ح تعدل غ ح ف فلذلك ا غ ح
تعدل غ ح د ايضاً وهما متبادلتان فالخط ا ب يوازي الخط س د (ق ٢٧ ك ١)

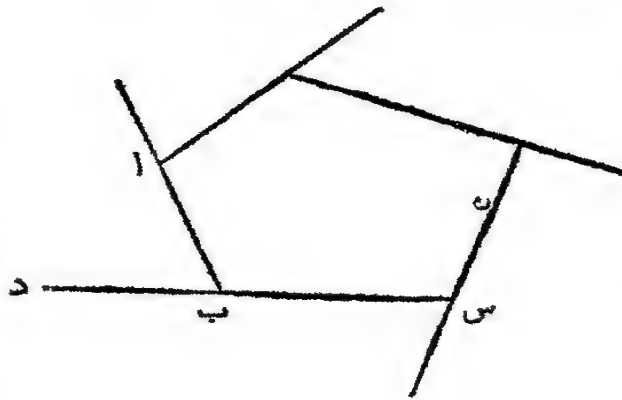
القضية الحادية والثلاثون . ع

علينا ان نرسم خطاً مستقيماً يمر في نقطة مفروضة ويوازي خطاً مستقيماً
مفروضاً

لتكن النقطة المفروضة وب س الخط
المستقيم المفروض . علينا ان نرسم خطاً مستقيماً
يوازي ب س ويمر بالنقطة ا

عين اية نقطة شئت في ب س كالقطة د مثلاً . ارسم ا د وفي النقطة ا من الخط
ا د ارسم الزاوية د ا ي واجعلها ان تعدل الزاوية ا د س (ق ٢٢ ك ١) واخرج
ي ا الى ف

فمن حيث ان الخط المستقيم ا د يلاقي الخطين المستقيمين ي ف ب س ويجعل
معهما الزاويتين المتبادلتين ي ا د ا د س متساويتين فالخط ي ف يوازي ب س
(ق ٢٧ ك ١) وقد رُسم حتى يمر في النقطة ا المفروضة



اضلاع الشكل الأربعة زوايا قائمة
فرع ثانٍ. مجموع الزوايا
الخارجية من كل شكل ذي
اضلاع مستقيمة يعدل اربع
زوايا قائمة لان كل زاوية
داخلة ا ب س مع الخارجية
المتوالية ا ب د تعدل قائمتين
(ق ١٢ ك ١) فجميع الداخلة

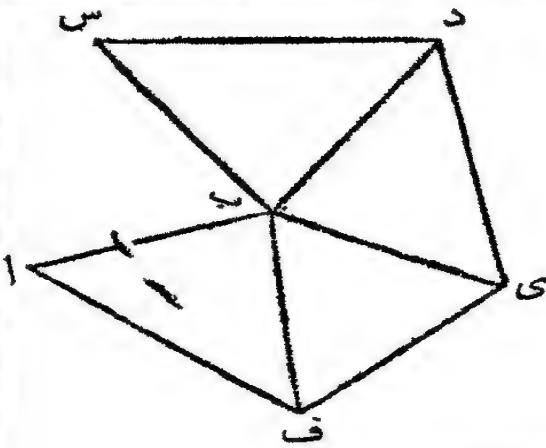
مع جميع الخارجية تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل والداخلة تعدل قائمتين في
عدد اضلاع الشكل الأربعة قائمات حسب الفرع الاول فالخارجية تعدل اربع قائمات
فرع ثالث. اذا فرضت زاويتان من زوايا مثلث او مجموعهما فتستعلم الثالثة
بطرح المجموع من قائمتين

فرع رابع. اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر فالثالثة من
الواحد تعدل الثالثة من الاخر والمثلثان متساوي الزوايا

فرع خامس. لا يكون في مثلث اكثر من زاوية واحدة قائمة. لانه لو كانت له
قائمتان لكانت الثالثة لاشيء. وبالاخرى لا يكون لمثلث اكثر من زاوية واحدة منفرجة
فرع سادس. في كل مثلث قائم الزاوية مجموع الحادتين يعدل قائمة
فرع سابع. من حيث ان كل مثلث متساوي الاضلاع هو متساوي الزوايا ايضاً
(فرع ق ٥ ك ١) فكل زاوية من زواياه تعدل ثلث قائمتين او ثلثي قائمة

فرع ثامن. مجموع زوايا ذي اربعة اضلاع يعدل قائمتين في ٤ - ٢ اي اربع
قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة قائمة وذلك يؤيد الحد الخامس
والعشرين والسادس والعشرين

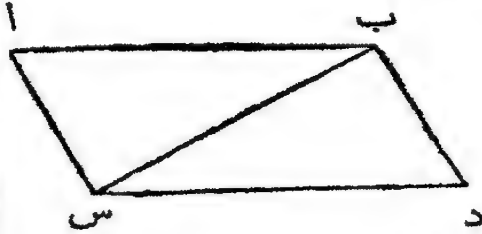
فرع تاسع. مجموع زوايا ذي خمسة اضلاع يعدل قائمتين في ٥ - ٢ اي ست
قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة خمس ست قائمات اي ٦ قائمة
فرع عاشر. مجموع زوايا ذي ستة اضلاع يعدل ٢ × (٦ - ٢) اي ثمان قائمات
فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة سدس ثمان قائمات اي ٨ قائمة



تعليقة . متى استعمل الفرع الاول في اشكال كثيرة الاضلاع لها زوايا متداخلة مثل ا ب س فيجب ان تحسب كل متداخلة اكبر من قائمتين واذا رسم ب د ب ي ب ف ينقسم الشكل الى اربع مثلثات لها ثنائي قائمات اي قائمتان في عدد الاضلاع الا اثنين

القضية الثالثة والثلاثون . ن

الخطان المستقيمان الموصولان بين اطراف خطين مستقيمين متوازيين متساويين هما متوازيان ومتساويان



ليكن ا ب و س د خطين مستقيمين متساويين متوازيين وليوصل بين اطرافهما بالخطين المستقيمين ا س ب د فهذان الخطان ايضا متوازيان ومتساويان

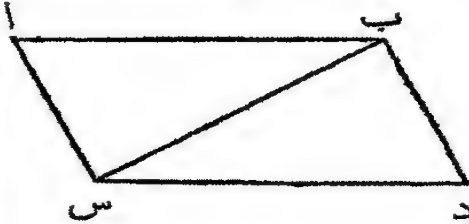
ارسم ب س فن حيث ان ب س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س د فالزاويتان المتبادلتان ا ب س ب س د هما متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ا ب يعدل س د والخط ب س مشترك بين المثلثين ا ب س ب س د فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالقاعدة ا س تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) وبقيت الزوايا من الواحد تعدل بقيت الزوايا من الاخر اي ا س ب تعدل س ب د . ومن حيث ان الخط ب س يلاقي الخطين ا س ب د ويجعل الزاويتين المتبادلتين ا س ب ب س د متساويتين فالخطان ا س ب د متوازيان (ق ٢٧ ك ١) وقد تبرهن انهما متساويان فرع اول . في كل شكل ذي اربعة اضلاع اذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين يكون الضلعان الاخران كذلك ويكون الشكل ذا اضلاع متوازية فرع ثان . كل ذي اربعة اضلاع ضلعاه المتقابلان متساويان هو ذو اضلاع متوازية

فرع ثالث. في كل ذي اربعة اضلاع اذا كانت الزوايا المتقابلة متساوية تكون
الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية

القضية الرابعة والثلثون

في شكل كمي اضلاع متوازية الاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة هي
متساوية. والقطر ينصفه اي يقسمه الى جزئين متساويين

ليكن ا ب د س متوازي الاضلاع وب س قطره فالاضلاع المتقابلة والزوايا
المتقابلة متساوية والقطر ب س ينصفه



فمن حيث ان الخط ب س يلاقي
الخطين المتوازيين ا ب س د فالزاويتان
المتبادلتان ا ب س ب س د متساويتان

(ق ٢٩ ك ١) وايضاً لان ب س يلاقي المتوازيين ا س ب د فالمتبادلتان ا س ب
س ب د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ففي المثلثين ا ب س ب س د زاويتان من الواحد
تعد لان زاويتين من الاخر والضلع ب س مشترك بين المثلثين فالضلعان الاخران
من الواحد يعدلان الضلعين الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل
الثالثة من الاخر (ق ٢٦ ك ١) اي ا ب يعدل س د و ا س يعدل ب د والزاوية
ب ا س تعدل س د ب ولان الزاوية ا ب س تعدل ب س د و ا س ب تعدل
س ب د فكل الزاوية ا ب د تعدل كل الزاوية ا س د وقد تبهرن ان ب ا س
تعدل ب د س فالزوايا المتقابلة والاضلاع المتقابلة من ذي اضلاع متوازية هي
متساوية وايضاً القطر ينصفه فلان ا ب يعدل س د وب س مشترك بين المثلثين
والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالمثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) وقد انتصف
الشكل بالقطر

فرع اول. خطان متوازيان بين خطين متوازيين متساويان

فرع ثان. خطان متوازيان هما على بعد واحد بعضهما من بعض ابداً

فرع ثالث. مجتمع زاويتين متواليتين من ذي اضلاع متوازية يعدل قائمتين

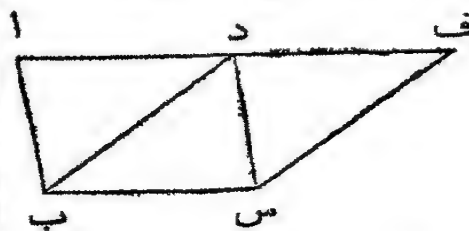
القضية الخامسة والثلاثون . ن

اشكال ذات اضلاع متوازية على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين

هي متساوية

انظر الشكل الثاني والثالث

ليكن ا ب س د وى ب س ف شكلين متوازيين الاضلاع على قاعدة واحدة



ب س وبين خطين متوازيين ا ف ب س

فالشكل ا ب س د يعدل الشكل

ب س ف. اذا انتهى الضلعان ا د د ف

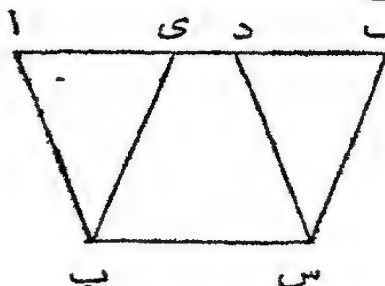
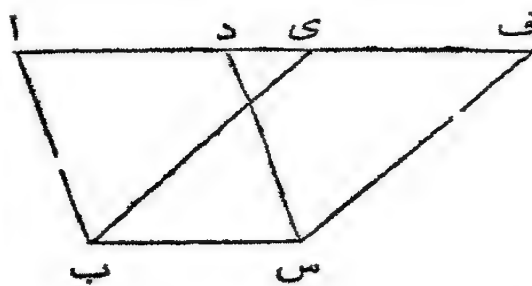
من الشكلين ا ب س د د ب س ف

المتقابلان للقاعدة ب س في نقطة واحدة د فالامر واضح ان كل واحد من الشكلين

انما هو مضاعف المثلث ب د س (ق ٣٤ ك ١) واذ ذاك فهما متساويان وان لم يتوا

في نقطة واحدة الضلعان ا د دى ف من الشكلين ا ب س د ب س ف المتقابلان

للقاعدة ب س



فثم من

حيث ان

ا ب س د

متوازيين

الاضلاع

فالضلع ا د يعدل ب س (ق ٣٤ ك ١) ولهذا السبب ايضا دى ف يعدل ب س

ولذلك ا د يعدل دى ف (اولية اولى) ودى مشترك فالكل او البقية اى ف يعدل

الكل او البقية د ف (اولية ثانية وثالثة) و ا ب يعدل د س فالضلعان دى ا ب

يعدلان الضلعين ف د د س كل واحد يعدل نظيره والزاوية الخارجة ف د س

تعدل الداخلة المتقابلة دى ا ب (ق ٣٤ ك ١) فالقاعدة دى ب تعدل القاعدة ف س

والمثلث دى ا ب يعدل المثلث ف د س (ق ٤ ك ١) اطرح المثلث ف د س من

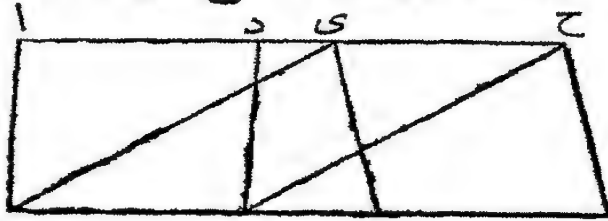
الشكل ا ب س ف واطرح منه ايضا دى ا ب فتكون البقايا متساوية (اولية ٣) اى

الشكل ا ب س د يعدل الشكل دى ب س ف

القضية السادسة والثلاثون

اشكال ذات اضلاع متوازية على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين هي متساوية

ليكن $ا ب س د$ و $ي ف غ ح$ شكلين متوازيين الاضلاع على قاعدتين



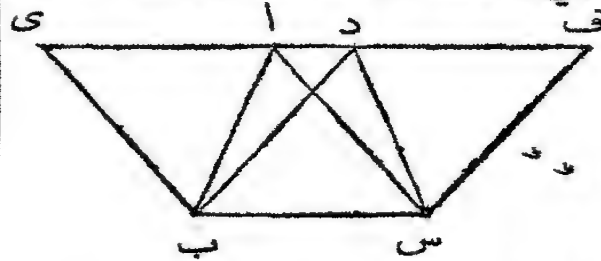
متساويتين $ب س$ و $ف غ$ وبين خطين متوازيين $ا ح$ و $ب غ$ فهما متساويان

ارسم $ب ي$ و $س ح$ فين حيث ان $ب س$ يعدل $ف غ$ و $ف غ$ يعدل $ي ح$ (ق ٢٤ ك ١) فلذلك $ي ح$ يعدل $ب س$ ايضاً وهما متوازيان وقد اُوصل بينهما الى جهة واحدة بالخطين $ب ي$ و $س ح$ والخطوط الموصلة بين خطين متوازيين متساويين الى جهة واحدة هي متوازية ومتساوية (ق ٢٢ ك ١) فالخطان $ب ي$ و $س ح$ متساويان متوازيان والشكل $ي ب س ح$ متوازي الاضلاع وهو يعدل الشكل $ا ب س د$ (ق ٢٥ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة $ب س$ وبين خطين متوازيين $ب س$ و $ا ح$ ولهذا السبب ايضاً الشكل $ي ف غ ح$ يعدل $ي ب س ح$ فالشكلان $ا ب س د$ و $ي ف غ ح$ متساويان

القضية السابعة والثلاثون

مثلثات على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين هي متساوية

ليكن $ا ب س د$ و $ب س$ مثلثين على قاعدة واحدة $ب س$ وبين خطين



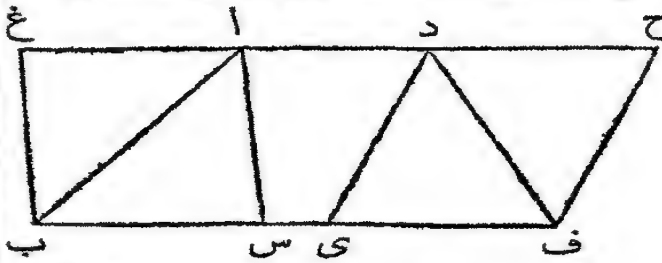
متوازيين $ا د$ و $ب س$ فهما متساويان اخرج $ا د$ الى الجهتين الى $ف$ و $ي$ ومن $ب$ ارسم $ب ي$ حتى يوازي $ا س$ (ق ٢١ ك ١) ومن $س$ ارسم $س ف$

حتى يوازي $ب د$ فكل واحد من الشكلين $ا ي ب س$ و $د ب س ف$ متوازي الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٥ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة $ب س$ وبين خطين

متوازيين ى ف وب س والمثلث اب س هو نصف الشكل اى ب س لان
القطر اب ينصفه (ق ٢٤ ك ١) والمثلث د ب س هو نصف الشكل د ب س ف
لان القطر د س ينصفه وانصاف اشياء متساوية هي متساوية بعضها لبعض (اولية ٧)
فالمثلث اب س يعدل المثلث د ب س

القضية الثامنة والثلاثون ن

مثلثات على قواعد متساوية وبين خطين متساويين هي متساوية



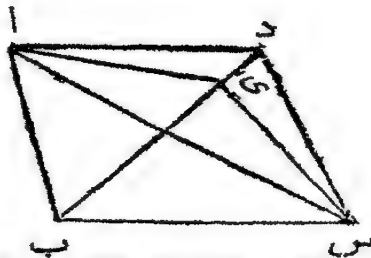
ليكن اب س و دى ف مثلثين
على قاعدتين متساويتين ب س
 ى ف وبين خطين متوازيين ا د
وب ف ف متساويان

اخرج ا د الى الجهتين الى ح و غ وارسم ب غ حتى يوازي اس (ق ٢١ ك ١)
ومن ف ارسم ف ح حتى يوازي $\text{دى فكل واحد من الشكلين ا ب س}$
 دى ف ح متوازي الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٦ ك ١) لانها على قاعدتين
متساويتين ب س ى ف وبين خطين متوازيين غ ح ب ف والمثلث اب س هو
نصف الشكل ا ب س غ (ق ٢٤ ك ١) لان القطر اب ينصفه و دى ف هو نصف
الشكل دى ف ح (ق ٢١ ك ١) لان القطر د ف ينصفه وانصاف اشياء متساوية هي
متساوية (اولية ٧) فالمثلث اب س يعدل المثلث دى ف

القضية التاسعة والثلاثون ن

مثلثات متساوية على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها هي بين

خطين متوازيين



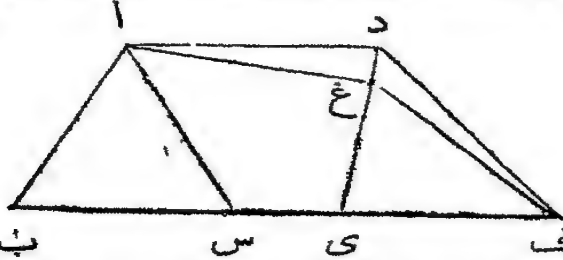
ليكن اب س و د ب س مثلثين متساويين
على قاعدة واحدة ب س وعلى جانب واحد منها
فهما بين خطين متوازيين
ارسم ا د فالخط ا د يوازي ب س والا ف

النقطة ا رسم اى حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) وارسم ى س فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ى ب س (ق ٢٢ ك ١) لانها على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س اى والمثلث ا ب س يعدل د ب س فالمثلث ى ب س يعدل د ب س واي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ب س و اى متوازيين وهكذا يبرهن في كل خط الا الخط ا د فهو يوازي ب س

القضية الاربعون . ن

مثلثات متساوية على قواعد متساوية وعلى جانب واحد منها هي بين خطين متوازيين اذا كانت القواعد على استقامة واحدة

ليكن ا ب س دى ف مثلثين متساويين على قاعدتين متساويتين وعلى استقامة واحدة ب س ى ف وعلى جانب واحد منها فهما بين خطين متوازيين

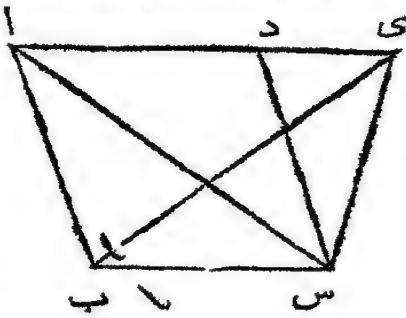


ارسم ا د فهو يوازي ب س والا ف ا رسم ا غ حتى يوازي ب س ف (ق ٢١ ك ١) وارسم غ ف فالمثلث ا ب س يعدل المثلث غ ى ف (ق ٢٨ ك ١) لانها على قاعدتين متساويتين ب س ى ف وبين خطين متوازيين ب س ا غ ولكن المثلث ا ب س يعدل المثلث دى ف فلذلك المثلث دى ف يعدل المثلث غ ى ف اي الاكبر يعدل الاصغر وذاك محال فالخط ا غ لا يوازي ب س وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ا د فهو يوازي ب س

القضية الحادية والاربعون . ن

اذا كان شكل ذو اضلاع متوازية ومثلث على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فالشكل مضاعف المثلث

ليكن الشكل ذو الاضلاع المتوازية ا ب س د والمثلث ى ب س على قاعدة

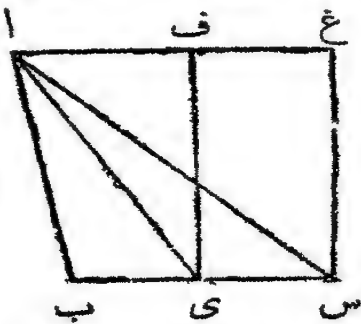


واحدة ب س وبين خطين متوازيين اى ب س
 فالشكل ا ب س د مضاعف المثلث اى ب س
 ارسم ا س فالمثلث ا ب س يعدل المثلث
 اى ب س (ق ٢٧ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة
 ب س وبين خطين متوازيين اى ب س ولكن
 الشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث ا ب س (ق ٢٤ ك ١) لان القطر ا س
 ينصفه فالشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث اى ب س ايضا

القضية الثانية والاربعون ع

علينا ان نرسم شكلاً ذا اضلاع متوازية حتى يعدل مثلثاً مفروضاً
 وزاوية من زواياه تعدل زاوية مستقيمة بسيطة مفروضة

ليكن ا ب س المثلث المفروض ود الزاوية البسيطة المفروضة علينا ان نرسم



شكلاً ذا اضلاع متوازية حتى يعدل المثلث

ا ب س وزاوية من زواياه تعدل

نصف ب س في اى (ق ١٠ ك ١)

ارسم اى ومن النقطة اى في الخط المستقيم

اى س اجعل الزاوية س اى ف حتى تعدل

د (ق ٢٢ ك ١) ومن ا ارسم ا غ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن س ارسم

س غ حتى يوازي اى ف فالشكل س اى ف غ متوازي الاضلاع فمن حيث ان

ب اى يعدل اى س فالمثلث ا ب اى يعدل المثلث اى س (ق ٢٨ ك ١) لانهما

على قاعدتين متساويتين ب اى س وبين خطين متوازيين ا غ ب س ولذلك

المثلث ا ب س هو مضاعف المثلث اى س والشكل اى س غ ايضا مضاعف

المثلث اى س (ق ٤١ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فالشكل

اى س غ يعدل المثلث ا ب س وله الزاوية س اى ف التي تعدل الزاوية المفروضة د

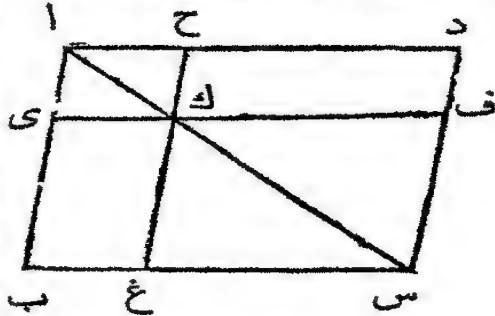
فرع. اذا كانت الزاوية د قائمة يكون الشكل اى س غ قائم الزوايا ويعدل

المثلث ا ب س فبنات هذا العمل يصنع مثلث حتى يعدل شكلاً مفروضاً زاوية قائمة

القضية الثالثة والاربعون

الاجزاء الممتدة لاشكال متوازية الاضلاع واقعة على جانبي قطر شكل متوازي الاضلاع هي متساوية

ليكن راب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس قطرة وي ح وغ ف شكلين



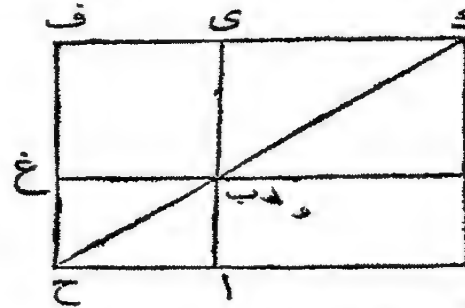
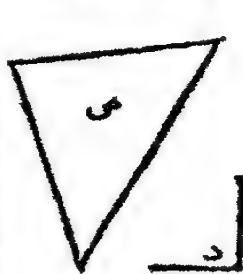
متوازي الاضلاع على جانبي القطر اس وليكن ب ك وك د الشكلين الاخرين المتبين لكل الشكل ا ب س د فالتم ب ك يعدل المثلث ك د فمن حيث ان ا ب س د متوازي الاضلاع واس قطرة فالمثلث ا ب س يعدل المثلث

ا د س (ق ٢٤ ك ١) ومن حيث ان ا ي ك ح متوازي الاضلاع فالمثلث ا ي ك يعدل المثلث ا ح ك ولهذا السبب ايضاً المثلث ك غ س يعدل المثلث ك ف س فالمثلث ا ي ك مع ك غ س يعدل المثلث ا ح ك مع ك ف س والكل ا ب س يعدل الكل ا د س فالبقية ب ك تعدل البقية ك د (اولية ٢)

القضية الرابعة والاربعون

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل مثلثاً مفروضاً وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس المثلث المفروض ود الزاوية المفروضة.



علينا ان نرسم على الخط ا ب شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل س وزاوية من زواياه تعدل ارسم الشكل

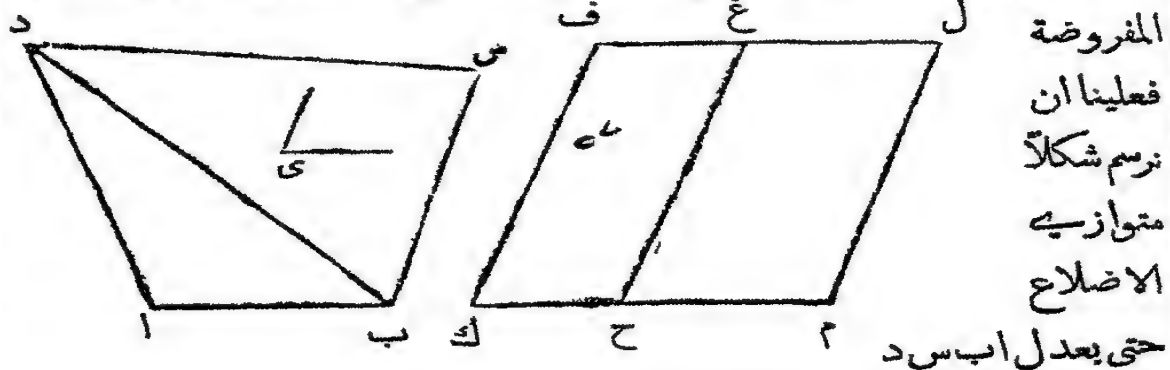
المتوازي الاضلاع ب ي ف غ حتى يعدل المثلث س (ق ٤٢ ك ١) واجعل الزاوية ي ب غ منه تعدل الزاوية د واجعل ضلعة ي ب والخط ا ب على استقامة

واحدة واخرج ف غ الى ح ومن ا رسم ا ح حتى يوازي ب غ او ي ف (ق ٢١ ك ١)
 وارسم ح ب . فمن حيث ان الخط المستقيم ح ف يلاقي المتوازيين ح ا ف ي فالزاويتان
 ا ح ف ح ف ي معاً تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) فالزاويتان ب ح ف ح ف ي
 معاً اقل من قائمتين ولا بد من التقاء ح ب و ف ي اذا اخرجنا (ق ٢٩ ك ١)
 فرج ا) اخرجها حتى يلتقيا في ك ومن ك ارسم ك ل حتى يوازي ي ا او ف ح واخرج
 ح ا الى ل واخرج غ ب الى م فالشكل ح ل ك ف متوازي الاضلاع وقطره ح ك
 والشكلان ا غ و م ي هما متوازي الاضلاع على جانبي القطر ح ك . ول ب وب ف
 هما المثلثان فالتم ل ب يعدل المثلث ب ف (ق ٤٣ ك ١) ولكن ب ف يعدل المثلث
 س فالشكل ل ب يعدل المثلث س ايضاً والزاوية غ ب ي تعدل الزاوية ا ب م
 (ق ١٥ ك ١) ولكن ي ب غ تعدل الزاوية د فالزاوية ا ب م تعدل د ايضاً فالشكل
 ل ب قد رُسم على الخط المفروض ا ب حتى يعدل المثلث المفروض س والزاوية
 ا ب م منه تعدل الزاوية المفروضة د

فرج . على هذا الاسلوب يتحول مثلث الى شكل ذي زوايا قائمة مفروض طول
 ضلع من اضلاعه . لانه اذا كانت د قائمة و ا ب الضلع المفروض فالشكل ا ب م ل
 يكون ذا زوايا قائمة ويعدل المثلث المفروض س

القضية الخامسة والاربعون . ع

علينا ان نرسم شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل شكلاً مفروضاً ذا
 اضلاع مستقيمة وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة
 ليكن ا ب س د الشكل المفروض ذا اضلاع مستقيمة وى الزاوية البسيطة



وزاوية من زواياه تعدل الزاوية ي

ارسم د ب ثم ارسم الشكل المتوازي الاضلاع ف ح (ق ٤٣ ك ١) حتى يعدل
المثلث ا د ب واجعل الزاوية ح ك ف منه تعدل الزاوية ي وعلى الخط المستقيم
غ ح ارسم الشكل المتوازي الاضلاع غ م (ق ٤٤ ك ١) واجعله يعدل المثلث
د ب س والمحاوية غ ح م تعدل الزاوية ي

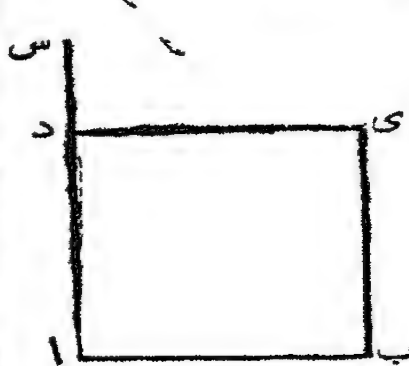
فمن حيث ان الزاوية ي تعدل الزاويتين ف ك ح غ ح م فالزاوية ف ك ح
تعدل غ ح م. اضف الى كل واحدة منها الزاوية غ ح ك فالزاويتان غ ح م غ ح ك
تعدلان الزاويتين ف ك ح غ ح ك ولكن ف ك ح ك ح غ ح م معا تعدلان قائمتين
(ق ٢٩ ك ١) فلذلك ك ح غ غ ح م تعدلان قائمتين فمن حيث ان الخط غ ح
يجعل مع ك ح ح م الزاويتين المتوالييتين تعدلان قائمتين فالخطان ك ح ح م
هما على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١) ومن حيث ان الخط المستقيم غ ح يلاقى
المتوازيين ك م ف غ فالزاويتان المتبادلتان م ح غ غ ح ف متساويتان (ق ٢٩
ك ١) اضف الى كل واحدة منها الزاوية ح غ ل فالزاويتان م ح غ غ ح ل تعدلان
الزاويتين ح غ ف ح غ ل ولكن م ح غ غ ح ل تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١)
ولذلك ح غ ف ح غ ل تعدلان قائمتين. فالخطان ف غ غ ل هما على استقامة
واحدة. ومن حيث ان ك ف يوازي ح غ و ح غ يوازي ل م فالخط ك ف يوازي
الخط ل م (ق ٣٠ ك ١) والخط ك م يوازي ف ل فالشكل ك م ل ف متوازي
الاضلاع. والمثلث ا ب د يعدل الشكل ح ف والمثلث د ب س يعدل الشكل
غ م فالكل ا ب س د يعدل الكل ك ف ل م. فقد رُسم شكل متوازي الاضلاع
ك م ل ف حتى يعدل الشكل المفروض ا ب س د والزاوية ف ك م منه تعدل
الزاوية المفروضة ي

فرع. على هذا الاسلوب يبني على خط مستقيم مفروض شكل متوازي الاضلاع
له زاوية تعدل زاوية مفروضة وهو يعدل شكلاً مفروضاً ذا اضلاع مستقيمة اي
يبني اولاً على الخط المفروض شكلاً متوازي الاضلاع يعدل المثلث الاول ا ب د
(ق ٤٤ ك ١) وزاوية من زواياه تعدل الزاوية المفروضة

القضية السادسة والاربعون ع

علينا ان نرسم مربعاً على خط مستقيم مفروض

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض، علينا ان نرسم عليه مربعاً



من النقطة ا ارسم الخط ا س عموداً على ا ب

(ق ١١ ك ١) واقطع ا د حتى يعدل ا ب (ق ٢ ك ١)

ومن د ارسم د ي حتى يوازي ا ب (ق ٢١ ك ١)

ومن ب ارسم ب ي حتى يوازي ا د، فالشكل

ا د ي ب متوازي الاضلاع والخط ا ب يعدل

د ي والخط ا د يعدل ي ب (ق ٢٤ ك ١) ولكن

ا ب يعدل ا د فالخطوط الاربعة ا ب ا د د ي ب ي هي متساوية والشكل المتوازي

الاضلاع ا ب ي د هو متساوي الاضلاع ايضاً وزواياه قائمة لان ا د الذي يلاقي

المتوازيين د ي ا ب يجعل الزاويتين ب ا د ا د ي تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١)

وقد جعلت ب ا د قائمة فتكون ا د ي ايضاً قائمة وفي كل شكل ذي اضلاع متوازية

تكون الزوايا المتقابلة متساوية (ق ٢٤ ك ١) فالزاويتان ا ب ي ب ي د هما

ايضاً قائمتان فالشكل ذو زوايا قائمة وقد تبرهنت مساواة الاضلاع وقد رُسم على

الخط المفروض ا ب

فرعاً، كل ذي متوازي الاضلاع له قائمة واحدة تكون جميع زواياه قائمات

القضية السابعة والاربعون ن

في كل مثلث ذي قائمة مربع الوتر يعدل مربعي الساقين

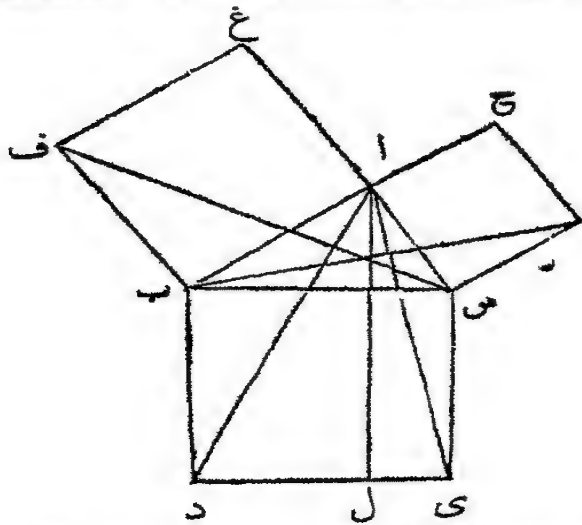
ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س فمربع الوتر ب س يعدل مربع ا ب مع

مربع ا س

ارسم على ب س المربع ب د ي س (ق ٤٦ ك ١) وعلى ب ا المربع ب غ وعلى

ا س المربع س ح ومن ا ارسم ا ل حتى يوازي ب د ا و س ي (ق ٢١ ك ١) ارسم ا د

و ف س، الزاوية ب ا س قائمة وب ا غ كذلك (حذ ٢٥) فالخط المستقيم ب ا



يجعل مع المخطئين المستقيمين اس اغ
الزاويتين المتوالتين با اس با غ
تعدلان قائمتين فالخطان على استقامة
واحدة (بق ١٤ ك ١) ولهذا السبب ك
الخطان با ا ح ايضاً على استقامة
واحدة. والزاوية دب س تعدل الزاوية
ف با لانهما قائمتان. اصف الى كل
واحدة اب س فكل الزاوية دب ا تعدل

الكل ف با س (اولية ٢) والضلعان اب ب د يعدلان الضلعين ف با ب س كل
واحد يعدل نظيره. والزاوية اب د تعدل الزاوية ف با س فالقاعدة ا د تعدل
القاعدة ف س (ق ٤ ك ١) والمثلث اب د يعدل المثلث ف با س. والشكل المتوازي
الاضلاع ب ل هو مضاعف المثلث اب د (ق ٤١ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة
ب د وبين خطين متوازيين ب د ا ل. والمربع ب غ هو مضاعف المثلث ف با س
لانهما على قاعدة واحدة ب ف وبين خطين متوازيين ب ف غ س والاشياء المضاعفة
اشياء متساوية هي متساوية (اولية ٦) فالشكل ب ل يعدل المربع ب غ. وهكذا اذا
رسم ب ك واى يبرهن ان الشكل س ل يعدل المربع ح س فكل المربع ب د س
يعدل المربعين ب غ وح س

فرع اول. مربع ساق مثلث ذي قائمة يعدل مربع الوتر الا مربع الساق الاخر
اي $اب^2 = ب س^2 + اس^2$

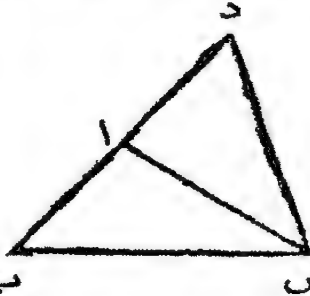
فرع ثان. اذا فرض $اب = اس$ اي اذا كان اب س متساوي الساقين فلنا
 $ب س^2 = اس^2 = اب^2$ وب س $= اب$ ٢٦

فرع ثالث. في مثلثين قائي الزاويتين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين
من الاخر فالضلع الثالث من الواحد يعدل الثالث من الاخر

القضية الثامنة والاربعون . ن

اذا عدل مربع ضلع مثلث مربعي الضلعين الآخرين فالمثلث قائم الزاوية

ليكن ا ب س مثلثا ولنفرض ان مربع ب س يعدل مربعي ب ا ك ا س فتكون ب ا س قائمة



من الرسم ا د عمودا على ا س (ق ١١ ك ١)
واجعل ا د يعدل ا ب وارسم د س

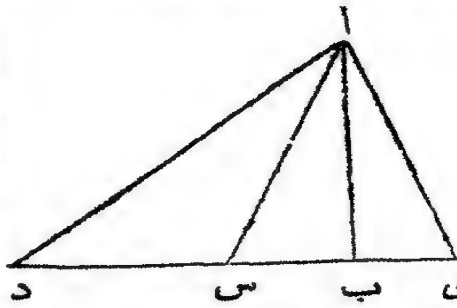
فن حيث ان د ا يعدل ا ب فمربع د ا يعدل مربع ا ب اضف الى كل واحد منهما مربع ا س فمربع د ا س مع مربع ا س يعدل مربع ب ا س ولكن مربع د س يعدل مربع د ا مع مربع ا س (ق ٤٧ ك ١) لان د ا س قائمة وحسب المفروض مربع ب س يعدل مربع ب ا مع مربع ا س . فمربع د س يعدل مربع ب س والضلع د س يعدل الضلع ب س ولان د ا يعدل ا ب و ا س مشترك بين المثلثين د ا س ب ا س والقاعدة ب س تعدل القاعدة د س فالزاوية د ا س تعدل الزاوية ب ا س (ق ٨ ك ١) ود ا س قائمة فتكون ب ا س قائمة ايضا

مضافات الى الكتاب الاول

قضية ١٠ ن

الخط العمودي هو اقصر الخطوط التي يمكن رسمها من نقطة خارجة عن خط مفروض الى ذلك الخط وكل خطين مائلين واقعين على جانبي العمود خارجين من نقطة واحدة وفاصلين جزئين متساويين من الخط الذي يقعان عليه متساويان ومن كل خطين اخرين مائلين فاصلين جزئين غير متساويين فابعدهما عن العمود اطولها

ليكن اب اس ا د الى اخره الخطوط المرسومة من النقطة المفروضة الى



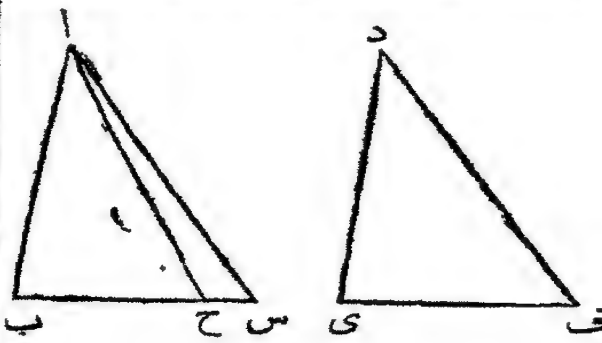
المخط المستقيم الغير المحدود د ي وليكن اب عموداً فهو اقصر من اس واس اقصر من ا د وهلم جرا لان الزاوية اب س قائمة فالزاوية اس ب حادة (ق ١٢ ك ١) واصغر من اب س والزاوية الصغرى من كل مثلث

قابليها الضلع الاقصر (ق ١٩ ك ١) فالضلع اب اقصر من الضلع اس. ثم اذا كان ب س وب ي متساويين يكون المثلثان المائلان اس ا ي متساويين ايضاً. لان الزاوية اب س = اب ي والضلع اب مشترك بين المثلثين اب س اب ي فالمثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) والضلع اس = ا ي. ولان الزاوية اس ب حادة فالزاوية اس د منفرجة لانها معاً تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) والزاوية ا د س حادة لان اب د قائمة فالزاوية اس د هي اكبر من ا د س فالضلع ا د اطول من الضلع س (ق ١٩ ك ١)

فرع اول. العمود هو قياس حقيقي للبعد بين نقطة وخط لانه البعد الاقرب بينهما
فرع ثان. كل نقطة في عمود على نقطة انتصاف خط هي على بعد واحد من طرفي الخط
فرع ثالث. من نقطة واحدة لا يمكن رسم ثلاثة خطوط متساوية الى خط واحد
والا لكان خطان مائلان متساويان على جانب واحد من العمود وذاك لا يمكن

قضيه ب. ن

اذا عدل وتر مثلث قائم الزاوية وساق من ساقيه وتر مثلث آخر قائم الزاوية وساقاً من ساقيه فالمثلثان متساويان
نفرض الوتر اس = د ف والضلع اب = د ي فالمثلث القائم الزاوية اب س



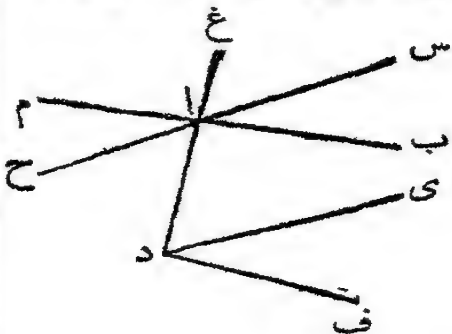
= القائم الزاوية دى ف. فلو فرضت
مساواة الضلع الثالث منها لكانت
مساواة المثلثين ظاهرة. وان لم يكن
الضلعان الاخران متساويين فخذ
جزءاً من ب س مثل ب ح حتى
يعدل دى ف (ق ٢ ك ١) ارسم ا ح

فالمثلث ا ب ح = دى ف (ق ٤ ك ١) لان ا ب = دى و ب ح = دى ف والزاوية
ا ب ح = دى ف لانها قائمتان فلذلك ا ح = د ف ولكن قد فرض ان ا س =
د ف فالنتيجة ان ا ح = ا س ولكن حسب القضية الماضية الأبعد عن العمود هو
اطول من الاقرب اليه فلا يمكن ان ا ح = ا س ولا يمكن ان ب س لا يعدل دى ف
فالمثلثان ا ب س دى ف متساويان

قضية ج. ن

اذا كان ضلعاً زاويةً موازيين ضلعي زاوية اخرى وكان انفراجهما الى
جهة واحدة فالزاويتان متساويتان

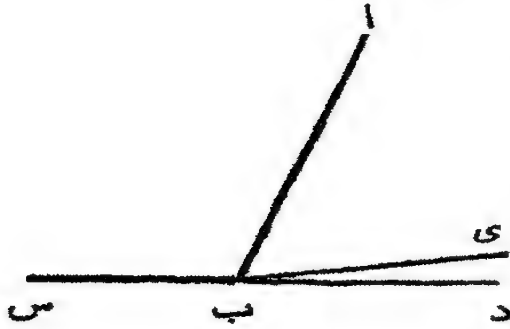
لنفرض ان ا ب يوازي د ف و ا س يوازي دى فالزاوية س ا ب = دى ف.
ارسم غ ا د على رأسهما. فلان ا ب يوازي د ف
فالزاوية الخارجة غ ا ب = غ د ف (ق ٢٩ ك ١)
ولهذا السبب غ ا س = غ دى فالبقية
س ا ب = البقية دى ف
فرغ. اذا اخرج ب الى م وس الى ح



فلنا ب ا س = ح ا م واذا ذاك فالزاوية ح ا م = دى ف ايضاً
تعليقة. يلزم حصر القضية بشرط انفراج الخططين الى جهة واحدة لان في
الزاوية س ا م س ا يوازي دى د و ا م يوازي د ف ولكن الزاويتان غير متساويتين
وس ا م وى د ف معاً تعدلان قائمتين

قضية د. ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وعلينا ان نجد الثالثة



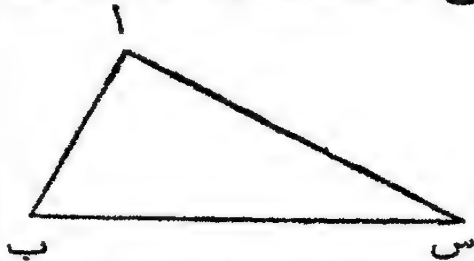
ارسم خطاً مستقيماً مثل س د وفي نقطة
منه مثل ب اجعل الزاوية س ب ا حتى
تعديل واحدة من الزاويتين المفروضتين
والزاوية ا ب س حتى تعديل الاخرى فالباقية
س ب د تعديل الثالثة لان هذه الثلاث
زوايا تعديل قائمتين (فرع ق ١٣ ك ١)

قضية ه. ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وضلع من اضلاعه فعلينا ان نرسم
المثلث

الزاويتان المفروضتان تكونان الموائيتين ضلع المفروض او تكون احدها
متوالية له والاخرى متقابلة له. ففي الحالة الثانية استعلم الثالثة حسب القضية الماضية
فتكون هي الاخرى المتوالية

ثم ارسم الخط المستقيم ب س حتى يعدل الضلع المفروض وعند ب اجعل
الزاوية س ب ا تعديل احدى المتوائيتين
وعند س اجعل الزاوية ب س ا تعديل
الاخرى المتوالية فالخطان ب ا ب س
يتقاطعان ويحدث من ذلك المثلث المفروض



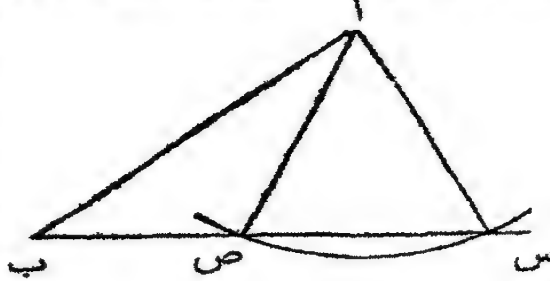
لانه لو كانا متوازيين لكانت الزاويتان عند ب وس تعديلان معاً قائمتين ولم تكونا
زوايا مثلث فبالضرورة يكون ا ب س المثلث المطلوب

قضية و.ع

مفروض ضلعان من اضلاع مثلث وزاوية متقابلة لاحدهما فعلينا ان

نرسم المثلث

لهذه العملية حالتان احدهما متى كانت الزاوية المفروضة منفرجة. اجعل الزاوية



ب ص ا تعدل المفروضة ثم اجعل

ص ا يعدل الضلع الذي يوالي

الزاوية المفروضة فلو جعلت النقطة ا

مركزاً والضلع الاخر ا ب بعداً ورسم

قوساً لقطع ب س على جانبي ص فلا

يمكن ان يرسم اكثر من مثلث واحد ذي زاوية منفرجة على هذه الكيفية وهو المثلث

ب ص ا

ولو كانت المفروضة قائمة لرسم مثلثان لكن كان الوتران يقطعان ب س على

بعد واحد على جانبي العمود فكان المثلثان متساويين

الحالة الثانية متى كانت الزاوية المفروضة حادة والضلع المتقابل اطول من

المتوالي فالعمل فيها كما تقدم. اجعل ب س ا تعدل المفروضة و ا س يعدل

الضلع المتوالي ثم اجعل ا مركزاً والضلع الاخر طولاً فاذا كان طوله ا ب فالقوس

يقطع س ب في ب. ارسم ا ب فيكون ب ا س المثلث المطلوب واذا كانت المفروضة

حادة والضلع المتقابل اقصر من الاخر فاجعل س ب ا تعدل المفروضة واجعل

ب ا يعدل الضلع المفروض المتوالي ثم اجعل ا مركزاً و ا س بعداً فالقوس يقطع

ب س في س و ص على جانب واحد من ب فيحدث مثلثان ب ا ص ب ا س وكل

واحد منهما مستوفٍ شروط العمل

تعليقة. في هذه الحالة الاخيرة لو كان طول الضلع الاقصر طول العمود من ا

الى ب س لحدث مثلث قائم الزاوية. ولو كان ذلك الضلع اقصر من العمود من ا

على ب س لكانت المسئلة غير ممكنة في كل الاحوال

قضية ز.ع

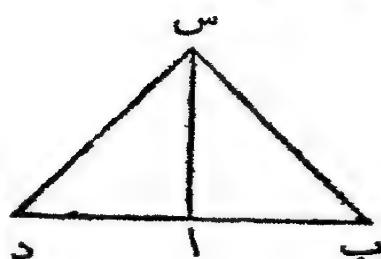
علينا ان نجد مثلثا يعدل شكلاً مفروضاً اذا اضلاع مستقيمة

ليكن ا ب س دى الشكل المفروض. ارسم القطر س دى الذي يفصل من الشكل المثلث س دى. ارسم د ف حتى يوازي س دى واخرج اى الى ف ثم ارسم س ف فالشكل ا ب س دى يعدل الشكل ا ب س ف لان المثلثين س دى س دى س ف فى ها على قاعدة واحدة س دى و س ف فخطين متوازيين س دى د ف فهما متساويان

(ق ٢٧ ك ١) ثم ارسم القطر س ا وارسم ب غ حتى يوازي س ا واخرج اى الى غ وارسم س غ فالشكل ا ب س دى قد تحول الى مثلث يعدله غ س ف فرع. من حيث ان المثلث يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله فبالضرورة كل ذي اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله

قضية ح.ع

علينا ان نستعلم ضلع مربع يعدل مجتمع مربعين



ارسم خطين غير محدودين مثل ا ب ا س احدهما عمودياً على الاخر. ثم اقطع ا ب حتى يعدل ضلعاً من احد المربعين المفروضين واس الاخر. ارسم ب س فلان ب ا س قائمة فمربع ب س = مربع ب ا مع مربع ا س (ق ٤٧ ك ١)

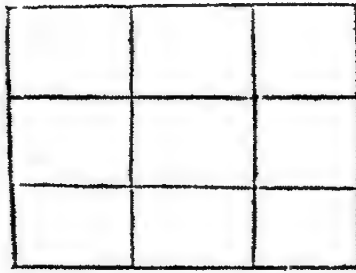
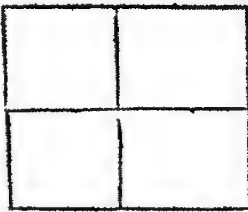
تعليقة. هكذا يرسم مربع يعدل مجتمع اى مربعات فرضت وذلك بتحويل ثلثة منها الى اثنين واثنين الى واحد وهلم جرا

اصول الهندسة

الكتاب الثاني

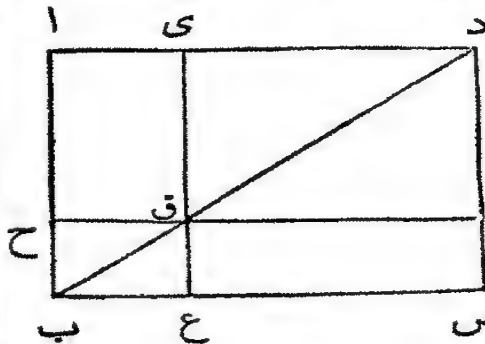
حدود

١ كل شكل متواري الاصلع قائم الزوايا يُعتر عنه بالضلعين المحيطين باحدى قائماته فالشكل اس المتوازي الاصلع القائم الزوايا يسمى القائم الزوايا الذي يحيط به ا د و د س او ا د و ب وهكذا الى اخره ولاجل الاختصار يقال القائم الزوايا ا د ب د س او ا د س او ا د د س او ا د د س حاصل خطين او مسطحهما في اصطلاح الهندسة هو القائم الزوايا المصطنع منها



مع ما يواربها. وقد تستعمل هذه العبارة ايضا في علم الحساب وعلم الجبر والمقابلة حيث يدل على حاصل كيتين غير متماثلتين. وادا كانتا متماثلتين فمسطحهما مربع اي

كمية في ذاتها. فمربعات الاعداد ١ ٢ ٣ الى اخره هي ١ ٤ ٩ الى اخره والمربع المرسوم على مضاعف خط هو اربعة امثال المربع المرسوم على الخط ذاته. والمرسوم على ثلاثة امثال خط هو تسعة امثال المرسوم على الخط ذاته

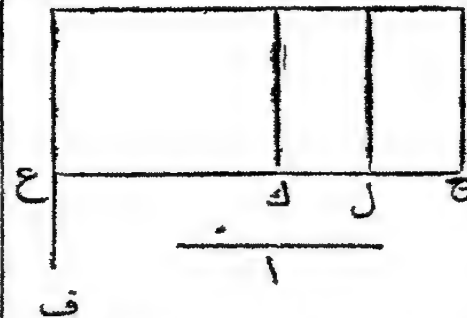


٢ شكل من الاشكال الواقعة على جابي القطر في كل شكل متواري الاصلع مع المتين يسمى علم فالشكل ح ع مع المتين ا ق ق س هو علم الشكل اس وكذلك ك ي ك مع ا ق وق س. ولاجل الاختصار يسمى الاول العلم اع ك او ي ح س

القضية الاولى . ن

اذا فرض خطان مستقيمان وانقسم احدهما الى اقسام متعددة فالقائم
الزوايا مسطحها يعدل مجتمع القائمات الزوايا مسطحات الخط الغير
المقسوم في اقسام المقسوم

ليكن ب س خطاً مستقيماً وا خطاً اخر مستقيماً وليقسم ب س الى اقسام في د
وي فالقائم الزوايا $a \times b$ س يعدل القائمات س ي د ي مع $a \times c$ س



الزوايا $a \times b$ د مع $a \times c$ د ي مع $a \times c$ ي س
من النقطة ب ارسم الخط ب ف عموداً
على ب س (ق ١١ ك ١) واقطع منه ب ع
حتى يعدل ا (ق ٢ ك ١) ومن ع ارسم ع ح
حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن النقط

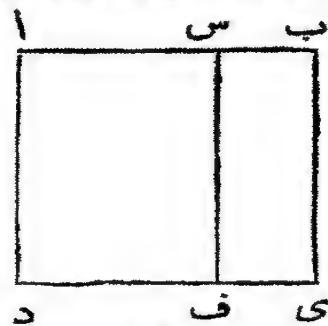
الثلاث د ي س ارسم المخطوط د ك ي ل س ح حتى توازي ب غ ف الاشكال
ب ح ب ك د ل ي ح هي قائمات الزوايا وب ح = ب ك + د ل + ي ح

ولكن ب ح = ب ع + ع ح = ب ع + ا = ب س لان ب ع = ا وب ك = ب غ
 $a \times b = د = ا \times ب$ لان ب د = ا و د ل = د ك $a \times د ي = ا \times د ي$ لان د ك =
ب غ = ا (ق ٢٤ ك ١) وهكذا ايضا ي ح = ا $a \times ي س$ فاذا $a \times ب س = ا \times ب د$
 $+ ا \times د ي + ا \times ي س$ اي القائم الزوايا او المسطح $a \times ب س$ يعدل مجتمع
القائمات الزوايا $a \times ب د + ا \times د ي + ا \times ي س$

تعليقة . خصائص اقسام المخطوط المبرهنة في هذا الكتاب تستعمل ايضا بسهولة
من علم الجبر والمقابلة . ففي هذه القضية اذا فرضنا اقسام الخط ب س ب وس ود
فلما $a \times (ب + س + د) = ا \times ب + ا \times س + ا \times د$

القضية الثانية . ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين والقائمات الزوايا مسطحات كل الخط في
كل واحد من قسميه ، عدل ما سربع كل الخط

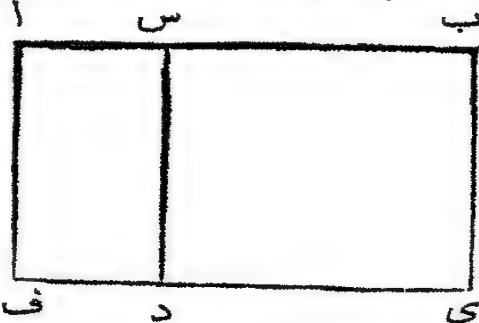


لينقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم
الزوايا اب \times ب س مع القائم الزوايا اب \times اس يعدلان
مربع اب اي اب \times ب س + اب \times اس = اب^٢
ارسم على اب المربع ادي ب (ق ٤٦ ك ١) ومن
س ارسم س ف حتى يوازي ا د او ب ي (ق ٢١ ك ١)
فلنا ف + س ي = ا ي ولكن اف = ا د \times اس = اب \times اس لان ا د = اب
والشكل س ي = ب ي \times ب س = ا ب^٢ \times ب س و ا ي = اب^٢ فاذا اب \times
اس + اب \times ب س = اب^٢

تعليقة. وهكذا بالحبر. فلنفرض اب = ا و اس = ب و س ب = د فلنا ا =
ب + د اضرب جانبي المعادلة في ا فلنا ا^٢ = اب + ا د

القضية الثالثة. ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين فالقائم الزوايا مسطح كل الخط في
احد قسميه يعدل القائم الزوايا مسطح القسمين مع مربع القسم المذكور
ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم الزوايا اب \times ب س يعدل



القائم الزوايا اس \times ب س مع مربع ب س
ارسم على ب س المربع س دي ب
(ق ٤٦ ك ١) واخرج ي د الى ف ومن ا
ارسم اف حتى يوازي س د او ب ي (ق ٢١ ك ١)
فالشكل ا ي = ا د + س ي ولكن

ا ي = اب \times ب ي = اب \times ب س لان ب ي = ب س و ا د = اس \times س د =
اس \times س ب و س ي = ب س^٢ فاذا اب \times ب س = اس \times س ب + ب س^٢
تعليقة. وهكذا بالحبر. فلنفرض اب = ا و اس = ب و س ب = د فلنا
ا = ب + د اضرب الجانبيين في س فلنا اس = س ب + س^٢

القضية الرابعة . ن

إذا انقسم خط مستقيم إلى قسمين فمربع الخط كله يعدل مربعي القسمين
مع مضاعف القائم الزوايا مسطح القسمين

ليقسم الخط المستقيم AB إلى قسمين في S فمربع AB يعدل مربع AS مع مربع
 SB مع مضاعف القائم الزوايا AS في S أي $AB^2 = AS^2 + SB^2 + 2 \times AS \times SB$

ارسم على AB المربع AD ب $(ق ٤٦ ك ١)$ وارسم B د ومن S ارسم SG

ف حتى يوازي AD و B ي $(ق ٣١ ك ١)$ ومن G ارسم
ح ك حتى يوازي AB و D ي

فن حيث ان S ف يوازي AD ويلاقيهما B د
فالزاوية الخارجة B غ S تعدل الداخلة المتقابلة
 AD ب $(ق ٢٩ ك ١)$ ولكن $AD = AB$ د $(ق ٥$

ك ١) لأن $B = A$ د لانهما ضلعا مربع . فالزاوية S ع $B = S$ ب غ و $B = S$
 S غ $(ق ٦ ك ١)$ ولكن $S = B = غ$ ك $(ق ٢٤ ك ١)$ و $S = غ = B$ ك فالشكل
 B س غ ك متساوي الاضلاع وهو متساوي الزوايا ايضاً لان S ب ك قائمة
فتكون بقية زوايا الشكل S غ ك ب قائمات (فرع ق ٤٦ ك ١) فهو مربع على
الضلع S ب وهكذا ايضاً يبرهن أن ح ف مربع وهو على الضلع غ ح الذي
يعدل AS فالشكلان ح ف س ك هما مربعاً AS س ب ولان المثلث AG يعدل
المثلث SG ي $(ق ٤٣ ك ١)$ و $AG = SG = AS \times AS = غ$ $AS \times SB$ ب فلذلك ايضاً SG
 $AS \times SB$ ب و $AG + SG = ي = 2 \times AS \times SB$ ولكن ح ف $= AS^2$ و S ك
 $= SB^2$ فإذا ح ف + س ك + $AG + SG = ي = AS^2 + SB^2 + 2 \times AS \times SB$
ولكن ح ف + س ك + $AG + SG = ي$ الشكل اي او ب فإذا $AB^2 = AS^2 + SB^2 + 2 \times AS \times SB$

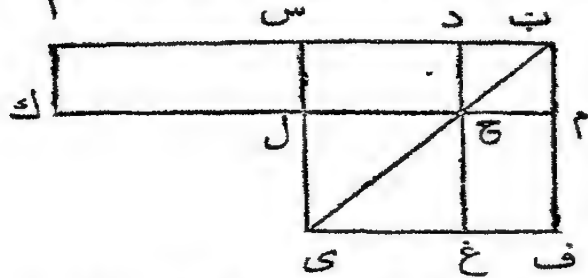
فرع . يتضح من هذه القضية ان الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر
مربع هي ايضاً مربعات

تعليقة . هذه القضية تبرهن ايضاً من مربع كمية ثنائية في الجبر فاذا قُرض القسمان
اوب فلنا $(ا + ب)^2 = ا^2 + ٢ ا ب + ب^2$

القضية الخامسة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير
متماثلين فالقائم الزوايا مسطح القسمين الغير المتماثلين مع مربع القسم
الواقع بين تقطعي الانقسام يعدل مربع نصف الخط

ليُقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س وغير متماثلين في د فالقائم



الزوايا ا د \times د ب مع مربع س د يعدل
مربع س ب اي ا د \times د ب + س د $=$ س ب 2

ارسم على س ب المربع س ي ف ب

(ق ٤٦ ك ١) وارسم القطر ب ي ومن د ارسم د ح غ (ق ٢١ ك ١) حتى يوازيه
س ي اوب ف ومن ح ارسم ك ل م حتى يوازي س ب اوى ف ومن ا ارسم ا ك
حتى يوازي س ل اوب م

فن حيث ان س ح = ح ف فاذا اضيف الى كل واحد منهما د م لنا س م =
د ف ولكن ا ل = س م (ق ٢٦ ك ١) فاذا ا ل = د ف . اُضيف الى كل واحد منهما
س ح فلنا ا ح = العلم س م غ . واح = ا د \times د ح = ا د \times د ب لان د ح = د ب
(فرع ق ٤ ك ٢) فالعلم س م غ = ا د \times د ب . اُضيف الى كل واحد منهما ل غ
س د فالعلم س م غ + ل غ = ا د \times د ب + س د ولكن س م غ + ل غ = ب س 2
فاذا ا د \times د ب + س د $=$ ب س 2

فرع . يتضح من هذه القضية ان فضلة مرتعي خطين غير متماثلين ا س د
يعدل القائم الزوايا مسطح مجتمعهما في فضلتها اي ان ا س 2 - س د $=$ (ا س + س د)
 \times (ا س - س د)

تعليقة . في هذه القضية لنفرض ا س = ا وس د = ب فلنا ا د = ا + ب ود ب

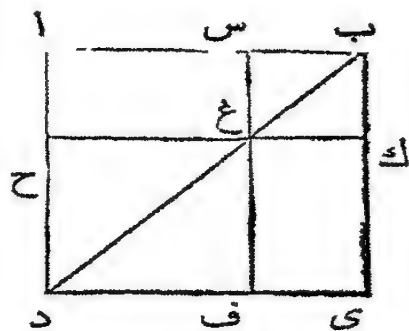
SECRET

تعليقة. وهكذا بالحجبر. لنفرض $x = 12$ و $b = d$ فلنا $d = 12 + b$ و $s = d + 1 = b + 12$ وبالضرب $b \times (12 + b) = 12b + b^2$. أضف الى الجانبيين a^2 فلنا $b \times (12 + b) + a^2 = 12b + b^2 + a^2 = (b + 12)^2$

القضية السابعة. ن

اذا اتقسم خط مستقيم الى قسمين فمربع كل الخط مع مربع احد القسمين
يعادل مضاعف القائم الزوايا مسطح الخط كله في ذلك القسم مع مربع
القسم الاخر

لِيُفَسِّمَ الْخَطَّ الْمُسْتَقِيمَ ا ب الى قسَمَيْنِ فِي س فَمَرِيعُ ا ب مَعَ مَرِيعِ ب س يَعْدِلُ
مُضَاعَفُ الْقَائِمِ الزَّوَايَا ا ب \times ب س مَعَ مَرِيعِ ا س اَيِ ا ب^٢ + ب س^٢ = ا ب^٣ \times
ب س + ا س^٢



تعليقة. في هذه القضية لنفرض $a = b$ و $s = b$ وس $b = s$ فلما

۱ = ۲ب + ۲ب س + س ۲ اصف س ۲ الی کل جاب فلنا

$$^1\text{ا} + ^1\text{س} = ^1\text{ب} + ^2\text{ب} + ^2\text{س} + ^2\text{ا} + ^1\text{س} = ^2\text{ب} + ^2\text{س} + ^2\text{ا} + ^1\text{س} \times (\text{ب} + \text{س})$$

$$ای^۱ + س^۱ = ۱۲ + س + ب^۱$$

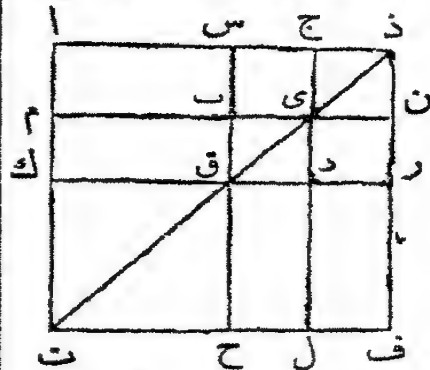
فرع^٢. يتضح من هذه القضية ان المربع المرسوم على فضلة خطين يعدل مجتمع المربعين المرسومين على الخطين إلا مضاعف القام الروايا مسطح الخطين. لان ١ -

س = ب وبما لترقية ا^٢ - ١٢ | س + س^٢ = ب^٢

القضية الثامنة. ن

إذا انقسم خط مستقيم الى قسمين فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح كل الخط في احد القسمين مع مربع القسم الاخر يعدل مربع الخط المركب من الكل مع القسم الاول

ليقسم الخط المستقيم ا ج الى قسمين في س فاربعة امثال القائم الزوايا ا ج \times ج س مع مربع ا س يعدل مربع الخط المركب من ا ج مع ج س



اخرج ا ج الى ذ واجعل ج ذ يعدل ج س وعلى ا ذ ا رسم المربع ا ت ف ذ وارسم شكلين مثل ما في القضية السالفة. فمن حيث ان ب ي = س ج (ق ٤٤ ك ١) وس ج = ج ذ

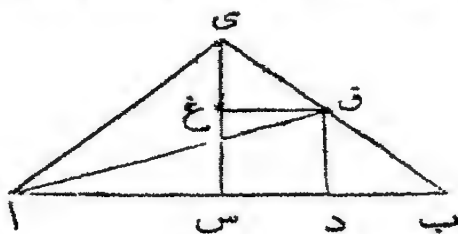
وج ذ = ن ي فلذلك ب ي = ن ي ولهذا السبب ايضا ق د = د ر ولان س ج = ج ذ وب ي = ي ن فالقائم الزوايا س ي وج ن متساويان وكذلك ايضا ب د = د ي ولكن س ي = ي ر (ق ٤٣ ك ١) لانها متماثل الشكل س ر فاذا ج ن = ب د والقائمات الزوايا الاربع س ي ج ن ي ر ب د متساوية وهي معا = ع س ي وايضا لان س ج = ج ذ وج ذ = ج ي (فرع ق ٤٤ ك ٢) اوس ب ولان س ج = ب ي اوب ق فلذلك س ب = ب ق ولان س ب = ب ق وق د = د ر فالقائم الزوايا ا ب = م ق وق ل = د ف ولكن م ق = ق ل (ق ٤٣ ك ١) لانها متماثل فاذا ا ب = د ف فالارباع ا ب م ق ق ل د ف متساوية وهي معا تعدل ع ا ب وقد تبرهن ان س ي ب د ج ن ي ر معا = ع س ي فباضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية يكون كل العلم ا ر ح = ع ا ي و ا ي = ا ج \times ج ي = ا ج \times ج س و ع ا ي = ا ج \times ج س فالعلم ا ر ح = ا ج \times ج س. اضف الى الجانبين ك ح او ا س (فرع ق ٤٤ ك ٢) فالعلم ا ر ح + ك ح = ا ج \times ج س + ا س ولكن ا ر ح + ك ح = ا ف = ا ذ فاذا ا د = ا ج \times ج س + ا س

فرع اول. من حيث ان ا ذ هو مجموع الخطين ا ج ج س واس فضلتهما

فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح خطين مع مربع فضلتهما يعدل مربع مجتمع الخطين
 فرع ثان. بما انه قد تبرهن من هذه القضية ان مربع س ذو اربعة امثال
 مربع س ج يتضح ان مربع خط هو اربعة امثال مربع نصفه
 تعلية. لنفرض ا ج = ا س = س وس ج = ب وا ذ = س + ٢ ب وا =
 ب + س. اضرب الجانبين في ٤ ب فلنا ٤ ا ب = ٤ ب + ٤ ب س اضف س
 الى الجانبين فلنا ٤ ا ب + س = ٤ ب س + ٤ ب س اي
 ٤ ا ب + س = ٢ (س + ٢ ب)

القضية التاسعة. ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير
 متماثلين فمربعاً القسمين الغير المتماثلين معاً يعدلان مضاعف مربع
 نصف الخط مع مضاعف مربع الجزء الواقع بين نقطتي الانقسام
 يُقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س وغير متماثلين في د فمربعاً
 ا د ب معاً يعدلان مضاعف مربعي



اس س د
 من س ا رسم س ي (ق ١١ ك ١)
 عموداً على ا ب واجعل س ي يعدل اس

اوس ب. ا رسم ا ي وى ب ومن دارسم د ق (ق ٢١ ك ١) حتى يوازيه س ي.
 ومن ق ا رسم ق غ حتى يوازيه ا ب وارسم ا ق. فمن حيث ان اس يعدل س ي
 فالزاوية ا س تعدل الزاوية ا ي س (ق ٢١ ك ١) وهما معاً قائمة لان اس ي
 قائمة (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) ولهذا السبب ايضاً كل واحدة من الزاويتين س ي ب
 س ب ي نصف قائمة. فالكل ا ي ب قائمة. ومن حيث ان غ ي ق نصف قائمة
 وى غ ق قائمة لانها تعدل الداخلة المتقابلة س ب (ق ٢٢ ك ١) فالباقية ي ق غ
 تعدل نصف قائمة. فالزاوية غ ي ق تعدل ي ق غ والضلع ي غ يعدل الضلع
 غ ي (ق ٦ ك ١) وايضاً لان الزاوية عند ب هي نصف قائمة وق د ب قائمة لانها تعدل

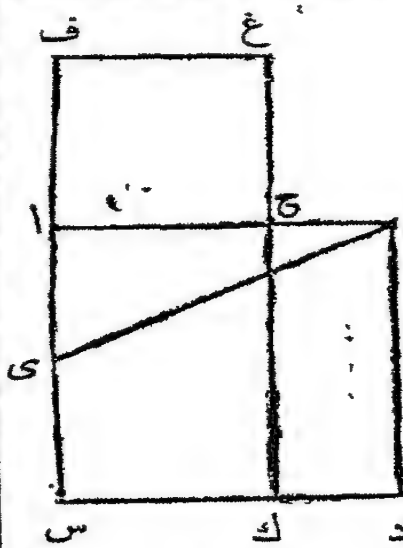
= ا س (ق ٥ ك ١) و ا س ي قائمة فكل واحدة من س ا ي س ي ا هي نصف قائمة (ق ٢٢ ك ١ فرع ٤) ولهذا السبب كل واحدة من س ي ب س ب ي ايضاً نصف قائمة فتكون ا ي ب قائمة. ومن حيث ان ي ب س نصف قائمة فالزاوية د ب غ ايضاً نصف قائمة (ق ١٥ ك ١) لانها متقابلتان وب د غ قائمة لانها تعدل المتبادلة د س ي (ق ٢٩ ك ١) فالباقية د غ ب نصف قائمة وتعدل د ب غ فالضلع ب د يعدل الضلع د غ (ق ٦ ك ١) ومن حيث ان ي غ ف نصف قائمة والزاوية عند ف قائمة لانها تعدل المتقابلة ي س د (ق ٢٤ ك ١) فالباقية ف ي غ نصف قائمة وتعدل ي غ ف فالضلع ف ي يعدل الضلع ف غ (ق ٦ ك ١) ولان ي س يعدل س ا ي س = س ا و ي س = س ا س ا = س ا و ا ي = س ا س + س ي (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا ي = س ا س ولان ي ف = ف غ ي ف = ف غ و ي ف + ف غ = س ا ي ف = ي غ (ق ٤٧ ك ١) و ي ف = س د فاذا ي غ = س د + ف غ وقد تبهرن ان ا ي = س ا س فاذا ا ي = ي غ + س ا س = س د + و غ = ا ي + ي غ (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا غ = س ا س + س د + و غ = ا د + د غ (ق ٤٧ ك ١) = ا د + د ب فاذا ا د + د ب = س ا س + س د

تعليقة. اذا فرضنا ان ا س = ا و ب د = ب و ا د = ا ٢ + ب و س د = ا + ب فلنا (ا ٢ + ب) + ب = ا ٢ + ا ٤ + ا ب + ب ٢ ولكن ا ٤ + ا ب + ب ٢ = ا ٢ + (ا + ب) ٢ فاذا (ا + ب) ٢ = ا ٢ + ب ٢

القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً مفروضاً الى قسمين حتى يعدل القائم الزوايا مسطح الكل في احد القسمين مربع القسم الآخر

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلياً ان نقسمه الى قسمين حتى يعدل القائم الزوايا مسطح ا ب في احد قسميه مربع القسم الآخر. ارسم على ا ب المربع ا ب د س (ق ٤٦ ك ١) ونصّف ا س في ي (ق ١٠ ك ١) ارسم ب ي واخرج س ا الى ف واجعل ي ف حتى يعدل ي ب (ق ٢ ك ١) وعلى ا ف ارسم المربع ف غ ح ا



(ق ٤٦ ك ١) فقد انقسم $اب$ في $ح$ حتى يعدل

القائم الزوايا $اب \times ب ح$ مربع $اح$

أخرج $غ ح$ الى $ك$ فمن حيث $ان اس$ قد

تنصف في $ي$ ثم أخرج الى $ف$ فالقائم الزوايا

$س ف \times ف ا$ مع مربع $اي$ يعدل مربع $ي ف$

(ق ٦ ك ٢) ولكن $ي ف$ يعدل $ي ب$ فالقائم

الزوايا $س ف \times ف ا$ مع مربع $اي$ يعدل مربع

$ي ب$ ولكن مربع $ي ب$ يعدل مربع $ب ا$ مع

مربع $اي$ (ق ٤٧ ك ١) لأن $ب ا$ أي قائمة فالقائم

الزوايا $س ف \times ف ا$ مع مربع $اي$ يعدل مربع $ب ا$ مع مربع $اي$. اطرح المشترك مربع

$اي$ فالباقي القائم الزوايا $س ف \times ف ا$ يعدل مربع $اب$ وس $ف \times ف ا$ يعدل الشكل

$ف ك$ لأن $ف ا = ف غ$ واد يعدل مربع $اب$ فالشكل $ف ك$ يعدل $اد$ اطرح

الجزء المشترك $اك$ فالباقي $ف ح$ يعدل الباقي $ح د$ ولكن $ح د = اب \times ب ح$ لأن

$اب = ب د$ و $ف ح$ هو مربع $اح$ فالقائم الزوايا $اب \times ب ح$ يعدل مربع $اح$ فقد

انقسم $اب$ الى قسمين في $ح$ والقائم الزوايا $اب \times ب ح$ يعدل مربع $اح$

القضية الثانية عشرة . ن

في كل مثلث ذي زاوية منفرجة اذا رُسم عمود من احدى الحادتين

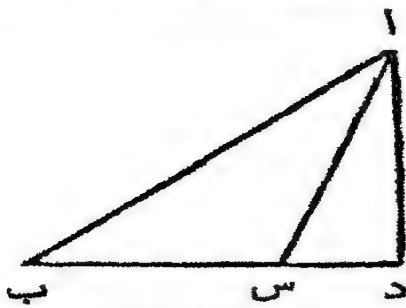
على الضلع المقابل بعد اخراجه فمربع الضلع الذي يقابل المنفرجة

هو اكبر من مربعي المحيطين بالمنفرجة بمضاعف القائم الزوايا مسطح

الضلع الذي وقع عليه العمود في الجزء المزيد اي الواقع بين المنفرجة

والعمود

ليكن $اب س$ مثلثا ذا زاوية منفرجة $اس ب$ وليقع عمود من $ا$ الى $د$ على



ب س بعد اخراجه الى د (ق ١٢ ك ١) فمربع
اب هو اكبر من مربعي اس وس ب بمضاعف
القائم الزوايا ب س \times س د

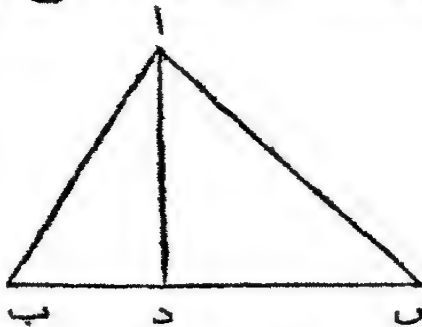
فين حيث ان ب د قد انقسم الى قسمين
في س فلنا (ق ٤ ك ٢) $ب د = د س + س ب$

س د + ٢ ب س \times س د اضف ا د الى الجانبين فلنا ب د + ا د = ب س +
س د + ا د + ٢ ب س \times س د ولكن ا ب = ب د + ا د (ق ٤٧ ك ١) واس
= س د + ا د فاذا ا ب = ب س + اس + ٢ ب س \times س د اي ا ب هو اكبر
من ب س + اس بمسطح ٢ ب س \times س د

القضية الثالثة عشرة من

في كل مثلث مربع الضلع المقابل احدى الزوايا الحادة هو اصغر من
مربعي الضلعين المحيطين بها بمضاعف القائم الزوايا مسطح احد
هذين الضلعين في الجزء منه الواقع بين الزاوية الحادة وعمود عليه من
الزاوية المقابلة

ليكن ا ب س مثلثا ولتكن الزاوية عند ب احدى زوايا الحادة وليقع على



الضلع ب س منه عمود ا د من الزاوية المقابلة
(ق ١٢ ك ١) فمربع الضلع اس الذي يقابل الزاوية
عند ب هو اصغر من مربعي س ب ب ا بمضاعف
القائم الزوايا س ب \times ب د

اولا يقع العمود ا د داخل المثلث ا ب س
فلان الخط المستقيم س ب قد انقسم في د فلنا (ق ٧ ك ٢) $ب س = ب د + د س$
٢ ب س \times ب د + س د اضف الى الجانبين ا د فلنا ب س + ب د + ا د =
٢ ب س \times ب د + س د + ا د ولكن ب د + ا د = ا ب وس د + ا د =
اس (ق ٤٧ ك ١) فاذا ب س + ا ب = ٢ ب س \times ب د + اس اي اس هو

اصغر من ب س^٢ + ا ب^٢ بمسطح ٢ ب س × ب د

ثانياً ليضع العمود ا د خارج المثلث ا ب س (انظر شكل القضية السابقة) فمن حيث ان الزاوية عند د هي قائمة فالزاوية ا س ب هي اكبر من قائمة (ق ١٦ ك ١)

وا ب^٢ = (ق ١٢ ك ٢) ا س^٢ + ب س^٢ + ٢ ب س × س د اضف الى الجانبين ب س^٢

فلنا ا ب^٢ + ب س^٢ = ا س^٢ + ٢ ب س^٢ + ٢ ب س × س د ومن حيث ان الخط

ب د قد انقسم في س فلنا (ق ٢ ك ٢) ب س^٢ + ب س × س د = ب س × س د + ب س × ب د

و ٢ ب س^٢ + ٢ ب س × س د = ٢ ب س × ب د فاذا ا ب^٢ + ب س^٢ = ا س^٢

+ ٢ ب س × ب د و ا س^٢ هو اصغر من ا ب^٢ + ب س^٢ بمسطح ٢ ب د × ب س

ثالثاً ليكن الضلع ا س عموداً على ب س فيكون ب س

الجزء بين العمود والزاوية الحادة عند ب والامر واضح (ق ٤٧

ك ١) ان ا ب^٢ + ب س^٢ = ا س^٢ + ٢ ب س × س د + ٢ ب س × ب د

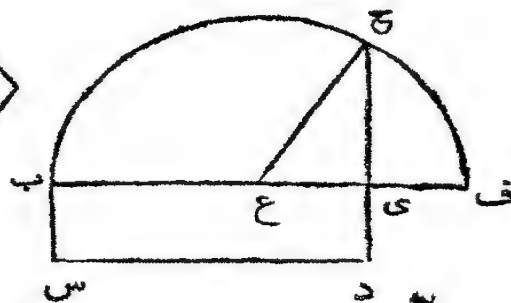
× ب س



القضية الرابعة عشرة ع

علينا ان نرسم مربعاً يعدل شكلاً مفروضاً اذا اضلاع مستقيمة

ليكن الشكل المفروض، علينا ان نرسم مربعاً يعدل الشكل ١. ارسم شكلاً اذا



زوايا قائمة ب ي د س واجعله

يعدل ا (ق ٤٥ ك ١) فان كان

ضلعاه ب ي ي د متساويين

فهو المربع المطلوب والا فاخرج

ب ي الى ف واجعل ي ف

يعدل ي د وتصف ب ف في

غ ومن المركز غ وعلى البعد غ ف او غ ب ارسم دائرة ب ج ف واخرج د ي الى

ح وارسم ح غ فلان الخط المستقيم ب ف قد انقسم الى قسمين متساويين في غ وغير

متساويين في ي فالقائم الزوايا ب ي ي ف مع مربع ي غ يعدل مربع غ ف

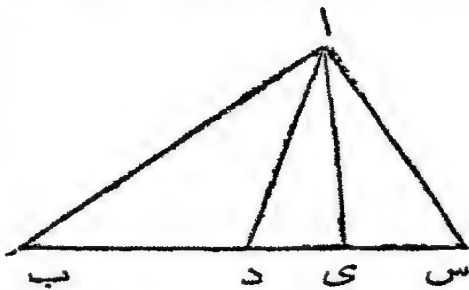
(ق ٥ ك ٢) و غ ف يعدل غ ح فالقائم الزوايا ب ي \times ي ف مع مربع ي غ يعدل مربع غ ح ومربع غ ح يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ب ي \times ي ف مع مربع غ ي يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ اطرح المشترك مربع ي غ فللباقى القائم الزوايا ب ي \times ي ف يعدل مربع ح ي وب د يعدل ب ي \times ي ف لان ي د = ي ف فالشكل ب د يعدل مربع ح ي وب د يعدل الشكل ا فمربع ح ي يعدل الشكل ا فاذا رُسم على ح ي مربع فهو يعدل الشكل ا المفروض

مضافات

قضية ١٠ ن

اذا تنصف ضلعاً من اضلاع مثلث فجميع مربعي الضلعين الآخرين يعدل مضاعف مربع نصف الضلع المتنصف مع مضاعف مربع الخط المرسوم من نقطة الاتصاف الى الزاوية المقابلة

ليكن ا ب س مثلثاً ولينصف الضلع ب س سة في د وارسم د ا الى الزاوية المقابلة فجميع مربعي ب ا ا س يعدل مضاعف مربعي ب د د ا



من الرسم اى عموداً على ب س فن حيث

ان ب ي اقائمة ا ب (ق ٤٧ ك ١) = ب ي

+ ي ا^٢ و ا س^٢ = س ي^٢ + ي ا^٢ و ا ب^٢ + ا س^٢

= ب ي^٢ + س ي^٢ + ي ا^٢ ومن حيث ان الخط المستقيم ب س قد انقسم الى

قسمين متساويين في د وغير متساويين في ي فلنا (ق ٩ ك ٢) ب ي^٢ + س ي^٢ =

٢ ب د^٢ + ٢ د ي^٢ فاذا ا ب^٢ + ا س^٢ = ٢ ب د^٢ + ٢ د ي^٢ + ٢ ا د^٢ + ٢ ا ي^٢ ولكن

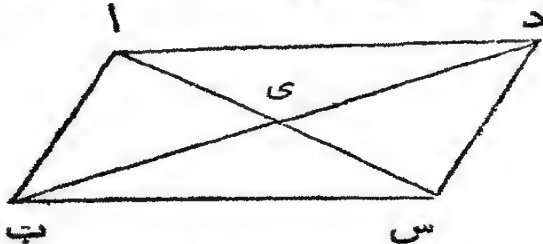
د ي^٢ + ا ي^٢ = ا د^٢ (ق ٤٧ ك ١) و ٢ د ي^٢ + ٢ ا ي^٢ = ٢ ا د^٢ فاذا ا ب^٢ + ا س^٢

= ٢ ب د^٢ + ٢ ا د^٢

قضية ب٠ ن

في كل شكل ذي اضلاع متوازية مجتمع مربعي القطرين يعدل مجتمع
مربعات الاضلاع

ليكن ا ب س د شكلاً متوازيهً الاضلاع فمجمع مربعي القطرين ا س ب د
يعدل مجموع مربعات الاضلاع ا ب
ب س س د د ا



لكن النقطة ي موضع تقاطع
القطرين. فمن حيث ان الزاويتين

المتقابلتين ا ي د س ي ب هما متساويتان (ق ١٥ ك ١) والمتبادلتان ي ا د
ي س ب متساويتان ايضاً (ق ٢٩ ك ١) فلنا في المثلثين ا د ي س ي ب زاويتان
من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلعان اللذان يقابلان الزاويتين المتساويتين
متساويان اي ا د و ب س (ق ٢٤ ك ١) فالضلعان الآخران متساويان (ق ٢٦ ك ١)
اي ا ي = ي س و ي د = ي ب

فمن حيث ان ب د قد تنصف في ي لنا (ق ١ ك ٢) ا ب + ا د = ب ي
+ ٢ ي ا وهكذا ايضاً د س + س ب = ب ي + ي س = ب ي + ٢ ي ا = ب ي + ٢ ي ا
١٢ ي لان ي س = ا ي فاذا ا ب + ا د + د س + س ب = ب ي + ٢ ي ا + ٢ ي ا
و ٤ ب ي = ب د و ٤ ا ي = ا س (فرع ٢ ق ٨ ك ٢) لان ب د و ا س قد تنصفاً
في ي فاذا ا ب + ا د + د س + س ب = ب ي + ٢ ي ا + ٢ ي ا + ا س

فرع. في كل شكل متوازي الاضلاع احد القطرين ينصف الآخر
تعليقة. لو كان الشكل معيناً لكان ا ب ب س متساويين والمثلثان ب ي س
د ي س متساويين ايضاً لان اضلاع الواحد تعدل اضلاع الآخر اي كل ضلع في
الواحد يعدل نظيره في الآخر وكات الزاويتان ب ي س د ي س متساويتين.
وفي شكل معين كل واحد من القطرين هو عمود على الآخر

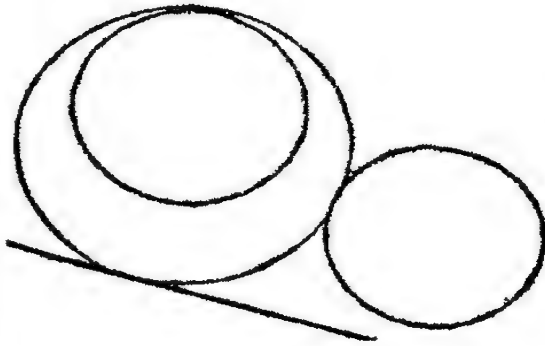
اصول الهندسة

الكتاب الثالث

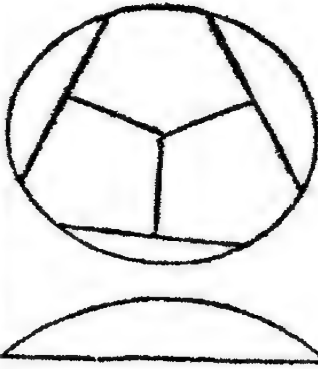
حدود

١. نصف قطر دائرة هو خطٌ مستقيم مرسوم من المركز الى المحيط

١. مماسٌ دائرة هو خط مستقيم يلاقي المحيط في نقطة واحدة وإذا أُخرج فلا يقطعها، وتلك النقطة تسمى نقطة المماسّة



٢. اذا التقى محيطا دائرتين بدون ان يتقاطعا يقال ان الدائرة الواحدة تمس الاخرى

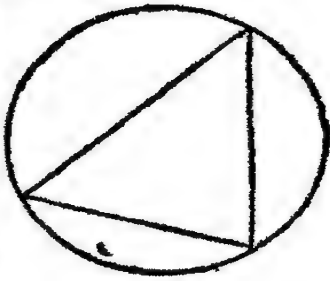


٣. خطوط مستقيمة على بُعد واحد من مركز دائرة هي التي كانت العموديات منها الى المركز متساوية

٤. والخط المستقيم الذي يقع عليه العمود الاطول هو الابعد عن المركز

ب. القوس هو جزء من محيط دائرة، والخط المستقيم الموصل بين طرفي قوسٍ يسمى وترًا

ج. متى كان طرفا خطٍ مستقيم في محيط دائرة قيل انه مرسوم في الدائرة

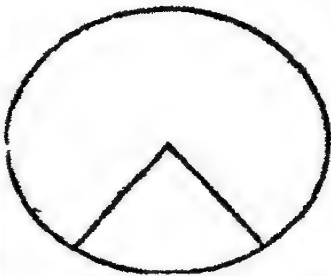


وكل خط مستقيم يلاقي المحيط في نقطتين يسمى قاطعاً
٥. كل جزء من دائرة يحيط به قوسٌ ووتره
يسمى قِطْعَةً

٦. زاويةٌ في قِطْعَةٍ هي الحادثة بين خطين
مستقيمين مرسومين من اية نقطة كانت من القوس

الى طرفي الوتر. ومثلثٌ في دائرة هو ما كانت زواياه الثلاث في المحيط. وعلى الاطلاق
كل شكل في دائرة هو ما كانت زواياه في المحيط. ويقال ان الدائرة تحيط به

٧. الزاوية عند المركز هي التي يحيط بها خطان
مستقيمان من المركز الى المحيط



٨. قِطَاع دائرة هو الشكل الذي يحيط به خطان مستقيمان من المركز الى
المحيط والقوس الواقع بين طرفيهما

٩. القِطْع المتشابهة هي ما
كانت الزوايا الحادثة فيها متساوية



القضية الاولى. ع

علينا ان نجد مركز دائرة مفروضة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة. علينا ان نجد مركزها

ارسم فيها خطاً مستقيماً مثل ا ب ونصِّفه في د

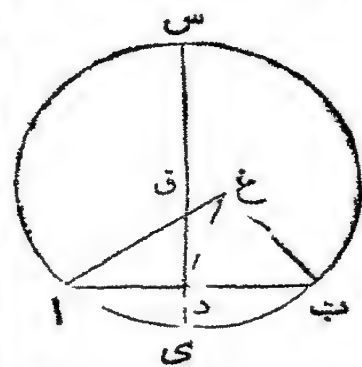
(ق ١٠ ك ١) ارسم د س عموداً على ا ب (ق ١١

ك ١) واخرجه الى ي ونصِّف س ي في ق فتكون

النقطة ق مركز الدائرة ا ب س

والا فلنكن النقطة غ مركزها وارسم غ ا غ د

غ ب. فمن حيث ان دا = دب ود غ مشترك بين



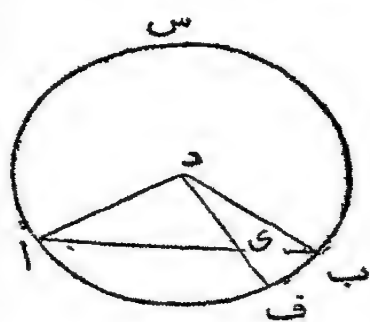
المثلثين غ دا غ دب فالضلعان ا د د غ يعدلان الضلعين ب د د غ اي كل

واحد يعدل نظيرة والقاعدة غ ا تعدل القاعدة غ ب لان كل واحدة منهما نصف قطر من دائرة واحدة فالزاوية ادغ = غ دب (ق ٨ ك ١) فتكون كل واحدة منهما قائمة (جد ٢ ك ١) فاذا غ دب قائمة ولكن ق دب قائمة فاذا غ دب = ق دب اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك مجال فلا تكون النقطة غ مركز الدائرة وهكذا يبرهن في كل نقطة ما عدا النقطة ق فهي اذا مركز الدائرة ا ب س
 فرع. يتضح من هذه القضية انه اذا كان خط عمودياً على اخر في دائرة وتصفه فالمرکز في المخط المنصف

القضية الثانية. ن

اذا قُرِضَتْ نقطتان في محيط دائرة فالمخط المستقيم الموصل بينهما واقع داخل الدائرة

لتكن ا ب س دائرة ولتفرض في محيطها نقطتان مثل ا وب وليوصل بينهما بالمخط المستقيم ا ب فهو داخل الدائرة



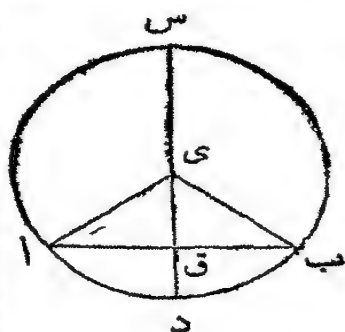
في المخط ا ب افرض اية نقطة كانت مثل ي واستعلم د مركز الدائرة ا ب س (ق ١ ك ٢) وارسم المخطوط المستقيمة ا د دب دى واخرج دى حتى يلاقى المحيط في ف فمن حيث ان دا = دب فالزاوية دا ب = الزاوية دب ا (ق ٥ ك ١) ومن حيث

ان اى ضلع من المثلث دى ا وقد اخرج الى ب فالزاوية الخارجة دى ب هي اكبر من د اى (ق ١٦ ك ١) فهي اكبر من دب ا ايضاً او دب ي والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩ ك ١) فاذا دب هو اطول من دى ولكن دب = د ف فاذا د ف هو اطول من دى اي النقطة ي هي داخل الدائرة وهكذا يبرهن في كل نقطة في المخط ا ب فهو اذا داخل الدائرة
 فرع. كل نقطة في ما يزداد على ا ب خارج الدائرة

القضية الثالثة . ن

كل خط مستقيم ماراً بمركز دائرة اذا نصّف خطاً آخر مستقيماً داخل الدائرة غير ماراً بالمركز فانه يُحدث معه قائمتين . واذا احدث معه قائمتين ينصفه

لتكن ا ب س دائرة وس د خطاً مستقيماً ماراً بمركزها ولينصف الخط المستقيم ا ب الذي لا يمر بالمركز في النقطة ق فانه يُحدث معه قائمتين



استعلم مركز الدائرة ي (ق ١ ك ٢) وارسم ا ي ب ي فن حيث ان ا ق = ق ب و ي ق مشترك بين المثلثين ا ق ي ب ق ي فضلعان من الواحد يعدلان ضلعين من الاخر والقاعدة ا ي تعدل القاعدة ي ب

والزاوية ا ق ي تعدل الزاوية ب ق ي (ق ١ ك ١) فكل واحدة منهما قائمة (حد ٧ ك ١) فالخط المستقيم د س الذي يمر بمركز الدائرة والذي ينصف الغير المار بالمركز ا ب يحدث معه قائمتين

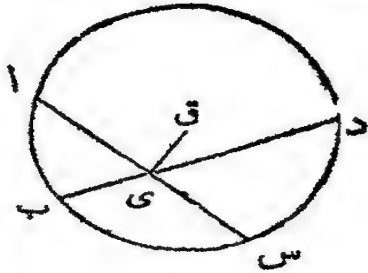
ثم لنفرض ان الخط المستقيم س د يحدث مع ا ب قائمتين فهو ينصفه ايضا اي ا ق يعدل ق ب . ثم الشكل حسبنا تقدم فن حيث ان ا ي يعدل ي ب فالزاوية ي ا ق تعدل ي ب ق (ق ٥ ك ١) والقائمة ا ق ي تعدل القائمة ب ق ي والضلع ي ق مشترك بين المثلثين ا ق ي ب ق ي وهو يقابل الزاويتين المتساويتين (ق ٢٦ ك ١) فالمثلثان متساويان والضلع الباقي من الواحد يعدل الباقي من الاخر اي ا ق = ق ب

فرع اول . العمود على نصف الوتر يمر بالمركز

فرع ثان . العمود على نصف الوتر اذا اُخرج حتى يلاقي المحيط من طرفيه فهو قطر . ونقطة انصافه هي مركز الدائرة

القضية الرابعة. ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة ولا يمران بالمركز فلا يتنصفان معاً
لتكن ا ب س د دائرة واس ب د خطين مستقيمين فيها يتقاطعان في النقطة



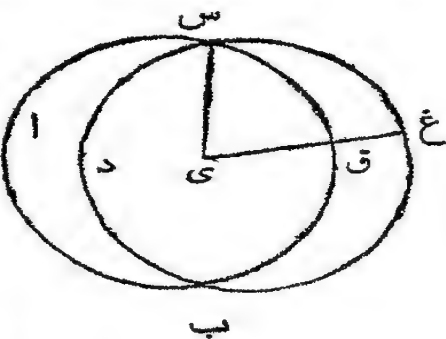
ي ولكن لا يمران بالمركز فلا ينصف بعضهما بعضاً وإلا
فاذا كان يمكن ليكن ا ي س متساويين وب ي
ي كذلك. فان مرّ احدها بالمركز فالامر واضح انه
لا يتنصف بالآخر الذي لا يمر بالمركز. وان لم يمر
احدها بالمركز فاستعلم المركز ق (ق ا ك ٢) وارسم ق

ي فمن حيث ان الخط المارّ بالمركز ق ي ينصف اخر الذي لا يمرّ بالمركز اس فيحدث
معه قائمتين (ق ٢ ك ٢) فتكون ق ي ا قائمة. ومن حيث ان ق ي ينصف ب د
الذي لا يمرّ بالمركز فيحدث معه قائمتين (ق ٢ ك ٢) فتكون ق ي ب قائمة وق ي ا
تعديل ق ي ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فاذا ا س ب د لا ينصف
بعضهما بعضاً

القضية الخامسة. ن

اذا تقاطعت دائرتان لا يكون لهما مركز واحد

لتكن ا ب س س د غ دائرتين ولتقاطعا في س وب فليس لهما مركز واحد
ولا فلتكن النقطة ي مركزها. ارسم س ي
وارسم خطاً آخر مثل ي ق غ يلاقي المحيطين في
ق و غ

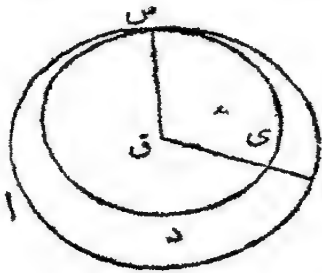


فمن حيث ان ي مركز الدائرة ا ب س
فنصف القطري س ي تعديل نصف القطري ق ي.
وايضاً من حيث ان ي مركز الدائرة س د غ
فنصف القطري س ي تعديل نصف القطري غ ي. وقد تبرهن ان س ي تعديل ق ي

فاذا ي ق يعدل ي غ اي الجزء يعدل الكل وذاك محال فلا يمكن ان تكون النقطة ي مركز الدائرتين

القضية السادسة . ن

اذا مست دائرة دائرة اخرى من داخلها فلا يكون لهما مركز واحد
لتكن ا ب س د ي س دائرتين ولتمس احدهما الاخرى في س فلا يكون لهما مركز واحد



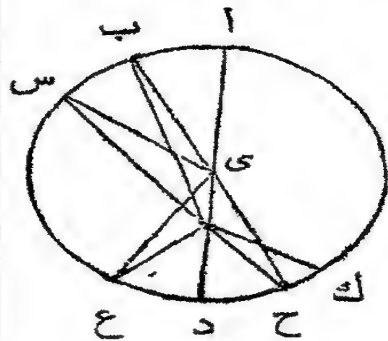
والا فلنكن النقطة ق مركزها . ارسم ق س وارسم خطا آخر مثل ق ي ب يلاقي المحيطين في ي وب . فمن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ب . وايضا لان

ق مركز الدائرة د ي س فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ي . وقد تبهرن ان ق س يعدل ق ب فاذا ق ي يعدل ق ب اية الجزء يعدل الكل وذاك محال فلا تكون النقطة ق مركز الدائرتين

القضية السابعة . ن

اذا فرضت نقطة في قطر دائرة غير المركز فاطول الخطوط المستقيمة التي يمكن رسمها من تلك النقطة الى المحيط هو الذي يقع فيه المركز اي قسم من القطر . واقصرها هو القسم الاخر من القطر واما بقية الخطوط التي ترسم من تلك النقطة الى المحيط فالاقرب الى القسم من القطر المار بالمركز هو الاطول ولا يرسم من تلك النقطة الى المحيط اكثر من خطين متساويين اية واحد على الجانب الواحد من القطر والاخر على الجانب الاخر منه

لتكن ا ب س ك دائرة وا د قطرها ولفرض فيه نقطة ف غير المركز ولتكن ي
المركز فيين كل المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى
المحيط فالخط ف ا هو الاطول وف د هو الاقصرومن
البقية فالخط ف ب اطول من ف س وف س اطول
من ف غ وهلم جرا. ارسم ب ي س ي غ ي فمن
حيث ان ضلعين من اضلاع مثلث هما معاً اطول من
الثالث (ق ٢٠ ك ١) فالضلعان ب ي ي ف هما



اطول من ب ف و ا ي يعدل ب ي فاذا ا ي ف يعني ا ف اطول من ب ف
وايضاً من حيث ان ب ي يعدل س ي و ي ف مشترك بين المثلثين ب ي ف
س ي ف فالضلعان ب ي ي ف يعدلان س ي ي ف ولكن الزاوية ب ي ف
هي اكبر من س ي ف فالقاعدة ب ف هي اطول من القاعدة س ف (ق ٢٤ ك ١)
ولهذا السبب س ف اطول من ع ف. وايضاً من حيث ان غ ف ف ي هما معاً
اطول من غ ي (ق ٢٠ ك ١) و ي غ يعدل ي د فاذا غ ف ف ي معاً هما اطول
من د ي اطرح الجزء المشترك ف ي فالبقية غ ف اطول من البقية د ف فاذا ف ا
هو اطول المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى المحيط وف د اقصرها وف ب اطول
من ف س وف س اطول من ف غ وهلم جرا

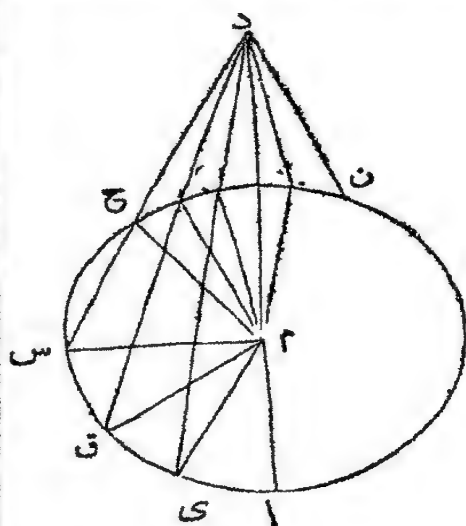
كذلك لا يمكن ان يرسم من ف الى المحيط على جانبي ف د اكثر من خطين
متساويين. عند ي اجعل الزاوية ف ي ح حتى تعدل غ ي ف وارسم ف ح. فمن
حيث ان غ ي يعدل ي ح و ي ف مشترك بين المثلثين غ ي ف ح ي ف
فالضلعان غ ي ي ف معاً يعدلان ح ي ي ف والزاوية غ ي ف تعدل ح ي ف
فالقاعدة ف غ تعدل القاعدة ف ح (ق ٤ ك ١) ولا يمكن ان يرسم خط اخر غير
ف ح يعدل ف غ من ف الى المحيط والا فليكن ذلك الخط الآخرف ك فمن
حيث ان ف ك يعدل ف غ وف غ يعدل ف ح فاذا ف ك يعدل ف ح اي
الخط الاقرب الى الذي يمر بالمركز يعدل الا بعد وذلك لا يمكن كما تقدم برهانه

القضية الثامنة. ن

اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها خطوط مستقيمة الى المحيط

ومرّاحداً بالمركز فاطول الخطوط الواقعة على مقعر الدائرة هو المارّ
بالمركز ومن البقية فالأقرب إلى المارّ بالمركز هو أطول من الأبعد عنه
ومن الخطوط الواقعة على محدّب الدائرة فالأقصر هو المرسوم من
النقطة المفروضة إلى القطر وإما البقية فالأقرب إلى الأقصر هو
أقصر من الأبعد عنه. ولا يرسم أكثر من خطين متساويين من النقطة
المفروضة إلى المحيط وذلك على جانبي الخط الأقصر

لتكن ا س ن دائرة ود نقطة مفروضة خارجها ولترسم الخطوط المستقيمة دا



دي دق دس إلى المحيط وليمرّ الخط دا
بالمركز. فمن الخطوط الواقعة على مقعر المحيط
اعني ي ق س فالأطول هو ا د والأقرب إلى
ا د يعني ي د هو أطول من ق د وق د أطول
من س د. ومن الخطوط الواقعة على محدّب
المحيط ح ل ك غ فالأقصر هو د ع بين النقطة
المفروضة د والقطر ا غ والأقرب إلى هذا يعني
د ك هو أقصر من د ل ود ل أقصر من د ح
وهلمّ جراً

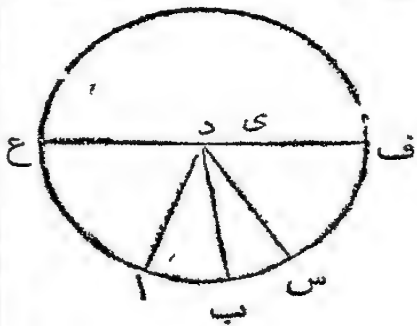
استعلم مركز الدائرة (ق ا ك ٢) وارسم م ي م ق م س م ح م ل م ك. فمن
حيث أن م ا يعدل م ي فاذا أضيف م د إلى كل واحد منهما لما د ا يعدل د م مع
م ي ود م وم ي هما معاً أطول من د ي (ق ٢٠ ك ١) فاذا د ا هو أيضاً أطول من
د ي. ومن حيث أن م ي يعدل م ق وم د مشترك بين المثلثين د م ي د م ق
فالضلعان د م م ي يعدلان الضلعين د م م ق ولكن الزاوية د م ي إنما هي أكبر
من الزاوية د م ق فالقاعدة د ي أطول من القاعدة د ق (ق ٢٤ ك ١) وهكذا أيضاً
يبرهن أن د ق أطول من د س. فاذا د ا هو أطول هذه الخطوط ود ي هو أطول
من د ق ود ق أطول من د س. ثم من حيث أن م ك ك د هما معاً أطول من م د
(ق ٢٠ ك ١) وم غ يعدل م ك فالبقية ك د هي أطول من البقية غ د (أولية ٥)

اعني دغ هو اقصر من دك ومن حيث ان م ك دك قد رُسم الى النقطة ك داخل
المثلث م ل د وذلك من م ود طرفي قاعدتي م د ف الخطان م ك ك د معاً هما اقصر
من م ل ل د معاً (ق ٢١ ك ١) وم ك يعدل م ل فالبقية ك د هي اقصر من البقية
ل د وهكذا يبرهن ان د ل هو اقصر من د ح فاذا دغ هو اقصر هذه الخطوط
ودك اقصر من د ل ود ل اقصر من د ح وهلم جرا
كذلك لا يرسم الا خطان متساويان من د الى المحيط وذلك على جانبي الاقصر
فعند النقطة م من الخط م د اجعل الزاوية د م ب حتى تعدل د م ك وارسم د ب
فلما في المثلثين ك د م ب د م الضلعان المتساويان ب م ك م والضلع المشترك د م
والزاوية ب م د تعدل الزاوية ك م د فالضلع الاخر د ك يعدل الاخر د ب (ق ٤
ك ١) ولا يرسم خط اخر غير د ب حتى يعدل د ك اعني من د الى المحيط
وان كان ممكناً فليكن د ن ذلك الخط فمن حيث ان د ن يعدل د ك ودك
يعدل د ب فاذا د ن يعدل د ب يعني الاقرب الى دغ يعدل الابدع عنه وقد
تبرهن ان ذاك غير ممكن

القضية التاسعة. ن

اذا فُرِضَتْ داخل دائرة نقطة يُرسم منها الى المحيط اكثر من خطين
مستقيمين متساويين فتلك النقطة هي مركز الدائرة

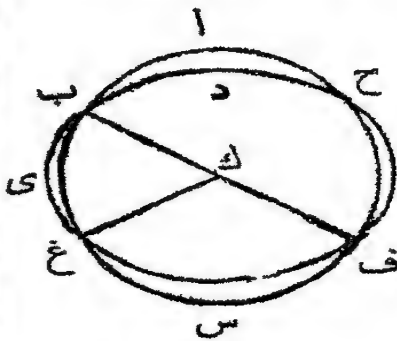
لتفرض النقطة د في الدائرة ا ب س التي منها يقع على المحيط اكثر من خطين
مستقيمين متساويين د ا د ب د س فالنقطة د
هي مركز الدائرة. والا فلتكن النقطة ي المركز. ارسم
د ي واخرجه الى المحيط في ف و غ فيكون الخط
ف غ قطراً ومن حيث انه قد تعين في القطر
نقطة اعني د التي ليست هي مركز الدائرة فالخط د
ف هو اطول الخطوط التي يمكن رسمها من تلك
النقطة الى المحيط (ق ٧ ك ٢) ود س هو اطول من د ب ود ب اطول من د ا



وقد فرضت مساواتها فذاك محال فاذا لا يمكن ان تكون ي المركز وهكذا يبرهن في كل نقطة غير د. فهي المركز

القضية العاشرة. ن

لا يمكن ان تقطع دائرة دائرة اخرى في أكثر من نقطتين
ان كان ممكناً ليقطع المحيط ف اب المحيط دى ف في أكثر من نقطتين اعني

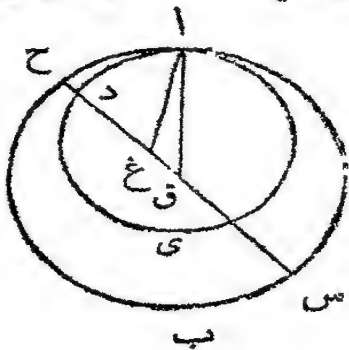


في ب و غ وف. استعلم ك مركز الدائرة اب س وارسم
ك ب ك غ ك ف. فمن حيث انه قد تعينت النقطة ك
داخل الدائرة دى ف ووقع منها على المحيط أكثر
من خطين مستقيمين متساويين اعني ك ب ك غ
ك ف فهي اعني ك مركز الدائرة دى ف (ق ٩ ك ٢)
وهي أيضاً مركزا ب س اي دائرة تقطع دائرة اخرى
ولها مركز واحد وذلك لا يمكن (ق ٥ ك ٢) فلا يمكن ان تقطع دائرة دائرة اخرى
في أكثر من نقطتين

القضية الحادية عشرة. ن

اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من داخلها فالخط المستقيم الموصل بين
مركزيهما اذا أخرج يمر بنقطة المماسّة

لتكن اب س ادى دائرتين ولتمسّ احدهما الاخرى في النقطة ا وليكن ق
مركز الدائرة اب س و غ مركز الدائرة ادى فالخط
الموصل بين ق و غ اذا أخرج يمر بنقطة المماسّة ا
والا فليقع على نقطة اخرى ان كان ممكناً مثل
الخط ق غ د ح. ثم ارسم اغ اق. فمن حيث ان
الضلعين اغ ق غ ق هما معاً أطول من اق (ق ٢٠ ك ١)
او ق ح لان ق ح ق ا نصف قطر لدائرة واحدة فاذا



طرح الجزء المشترك ق غ فالباقي غ ا يعدل الباقي غ ج ولكن اغ يعدل غ د فاذا غ د يعدل غ ح اعني الجزء يعدل الكل وذاك محال . فالخط الموصل بين المركزين لا يمكن وقوعه مثل الخط ق غ د ح وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا الذي يقع على النقطة ا

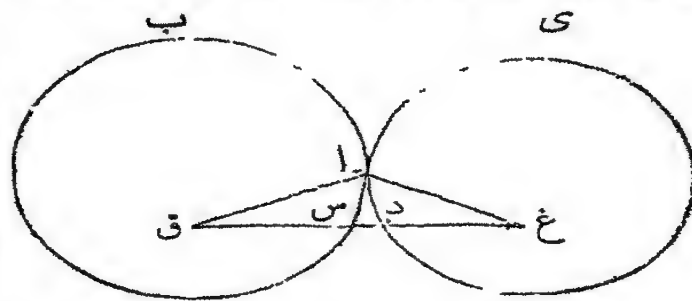
فرع اول . اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من داخلها فالبعد بين مركزيهما يعدل فضلة نصفي قطريهما لان المحيطين يمران بنقطة واحدة في الخط الموصل بين المركزين

فرع ثان . بالقلب اذا عدل البعد بين المركزين فضلة نصفي القطرين فالدائرة الواحدة تمس الاخرى من داخلها

القضية الثانية عشرة . ن

اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من خارجها فالخط المستقيم الموصل بين مركزيهما يمر بنقطة الماسة

لتكن ا ب س ا دى دائرتين ولتمس احدهما الاخرى في ا وليكن ق مركز الدائرة ا ب س وليكن غ مركز الدائرة ا دى فالخط المستقيم الموصل بين ق و غ يمر بنقطة الماسة



والا فليقع على غير نقطة

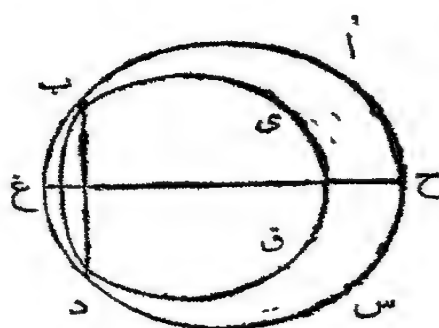
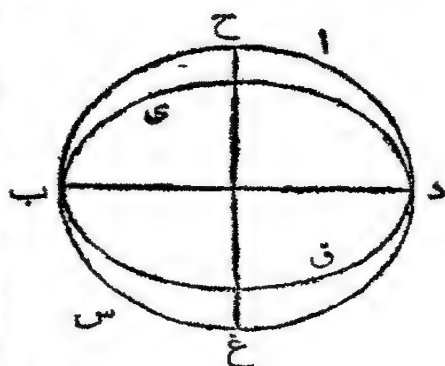
الماسة مثل الخط ق س د غ ا رسم ق ا غ ا فن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س فالخط ق س يعدل ق ا و غ مركز ا دى فالخط غ د يعدل غ ا فاذا غ ا ق معا يعدل ق س غ د معا فالكل ق غ ا طول من ق ا غ معا وذلك لا يمكن (ق ٢٠ ك ا) وهكذا يبرهن في كل خط غير الذي يمر بنقطة الماسة

فرع . اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من خارجها فالبعد بين مركزيهما يعدل مجتمع نصفي قطريهما وبالقلب اذا عدل بعد مركزيهما مجتمع قطريهما فالواحدة تمس الاخرى من خارجها

القضية الثالثة عشرة. ن

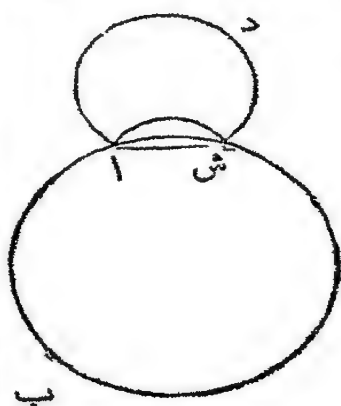
دائرة لا تمس أخرى في أكثر من نقطة واحدة ان كان من داخل او
من خارج

ان كان يمكن لتميس الدائرة ي ب ق الدائرة ا ب س في أكثر من نقطة واحدة وأولاً



من داخل في
ب ود ا رسم
المخط ب د
وارسم ح غ
عموداً عليه
(ق ٧ وق ١١
ك ١) ولينصفه

ايضاً. فمن حيث ان ب ود هما في محيط كل واحدة من الدائرتين فالمخط المستقيم ب
د واقع داخل كل واحدة منهما (ق ٢ ك ٢) ومركزها في المخط العمودي عليه المنصفه
(فرع ق ١ ك ٢) فاذا غ ح يمر بنقطة الماسة (ق ١١ ك ٢) وهو لا يمر بهما لان ب ود
خارجتان عن المخط المستقيم غ ح فلا يمكن ان تمس الدائرة الاخرى في أكثر من
نقطة واحدة من داخل ولا يمكن ذلك من خارج. فان كان يمكن فلتمس الدائرة

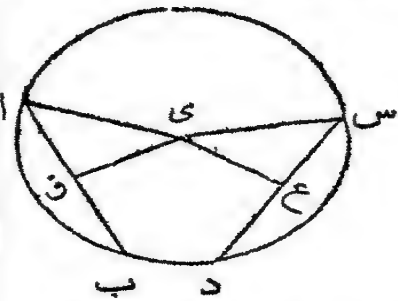


اش د الدائرة اش ب في ا وش ا رسم اش فالنقطتان
ا وش هما في محيط الدائرة اش د فيكون المخط اش كلة
داخل اش د واش د خارج اش ب فيكون اش
خارج اش ب ايضاً ومن حيث ا وش هما في محيط اش
ب فالمخط اش هو داخل اش ب (ق ٢ ك ٢) وقد
تبرهن انه خارجها وذلك محال فلان تمس دائرة دائرة
اخرى من خارج في أكثر من نقطة واحدة

القضية الرابعة عشرة. ن

خطوط مستقيمة متساوية في دائرة هي على بعد واحد من المركز.
وخطوط مستقيمة على بعد واحد من المركز هي متساوية

ليكن ا ب وس د خطين مستقيمين متساويين في الدائرة ا ب د س فهما على
بعد واحد من المركز. استعمل المركز ي (ق ١ ك ٢)



وارسم ي ق ي غ عمودين على ا ب وس د وارسم
ايضاً ا ي وس ي. فمن حيث ان الخط المستقيم المار
بالمركز اعني ي ق يجعل مع ا ب الذي لا يمر بالمركز
زاوية قائمة فهو ينصفه ايضاً (ق ٢ ك ٢) فاذا ا ق

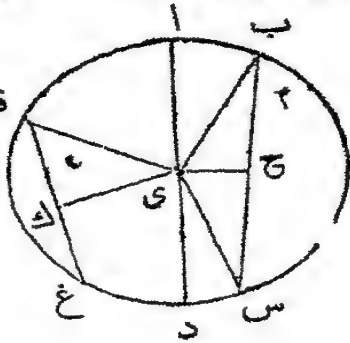
يعدل ق ب اعني ا ب هو مضاعف ا ق. وهكذا ايضاً يبرهن ان س د مضاعف
س غ. و ا ب يعدل س د فاذا ا ق يعدل س غ. ومن حيث ان ا ي يعدل ي س
فمربع ا ي يعدل مربع ي س ومجتمع مربعي ا ق ق ي يعدل مربع ا ي (ق ٤٧ ك ١)
لان ا ق ي قائمة وهكذا ايضاً مجتمع مربعي س غ غ ي يعدل مربع س ي. فمربع ا ق
ق ي يعدل لان مربعي س غ غ ي ومربع س غ يعدل مربع ا ق لان س غ يعدل ا ق
فاذا مربع الباقي غ ي يعدل مربع الباقي ي ق اعني غ ي يعدل ي ق فاذا ا ب
وس د هما على بعد واحد من المركز (حد ٢ ك ٢)

ثم اذا فرض انهما على بعد واحد من المركز اعني ان ق ي يعدل غ ي فهما
متساويان لانه يبرهن على ذات الاسلوب السابق ان ا ب مضاعف ا ق وس د
مضاعف س غ وان مجتمع مربعي ا ق ق ي يعدل مجتمع مربعي س غ غ ي ومربع
ق ي يعدل مربع غ ي فمربع الباقي ا ق يعدل مربع الباقي س غ و ا ق يعدل س غ
و ا ب مضاعف ا ق وس د مضاعف س غ فاذا ا ب يعدل س د

القضية الخامسة عشرة. ن

القطر هو اطول الخطوط التي ترسم في دائرة اما البقية فالاقرب الى
المركز اطول من الابد عنه والاطول هو اقرب الى المركز من الاقصر

لتكن ا ب س د دائرة واد قطرها وى مركزها وليكن ب س خطأ فيها
وليكن اقرب الى المركز من الخط ف غ فالقطر ا د
اطول من اى خط آخر رسم في الدائرة وب س
اطول من ف غ
ارسم ح عموداً على ب س وى ك عموداً
على ف غ وارسم ح ي ف ي ب س . فمن حيث
ان اى يعدل ب س وى د يعدل ح س فالكل
ا د يعدل ب س وى د يعدل ح س (ق ٢٠ ك ١)
فاذا ا د اطول من ب س

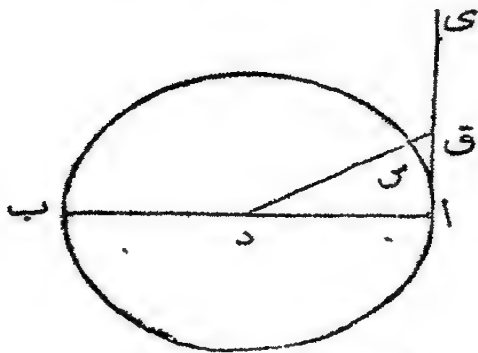


ومن حيث ان ب س اقرب الى المركز من ف غ فالعمود ح اقصر من
العمود ك (حد ٤ ك ٢) وب س هو مضاعف ب ح (ق ١٤ ك ٣) وف غ مضاعف
ف ك ومجتمع مربعي ب ح ح ي يعدل مجتمع مربعي ف ك ك ي ومربع ح ي ح اصغر
من مربع ك فيكون مربع ح ب اكبر من مربع ك ف فاذا ب ح اطول من ك ف
وب س ايضاً اطول من ف غ
ثم ليقرض ان ب س اطول من ف غ فهو ايضاً اقرب الى المركز من ف غ
ان ب س اطول من ف غ فاذا ب ح اطول من ف ك ومجتمع مربعي ف ك ك ي
يعدل مجتمع مربعي ب ح ح ي ومربع ب ح اكبر من ف ك فيكون مربع ح ي ح
اصغر من مربع ك اعني ح ي ح اقصر من ك فاذا (حد ٤ ك ٣) ب س اقرب
الى المركز من ف غ
فرغ . الوتر الاقصر هو الابدع عن المركز وبالقلب الوتر الابدع عن المركز هو
الاقصر

القضية السادسة عشرة . ن

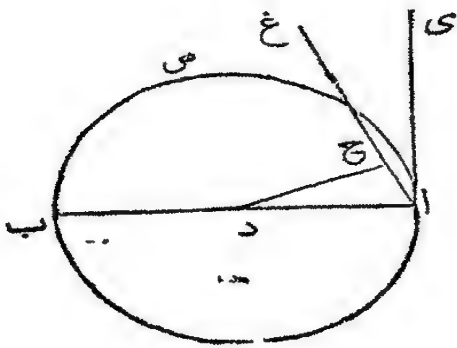
الخط المستقيم العمودي على طرف قطر دائرة هو واقع خارج الدائرة
ولا يرسم خط مستقيم من طرف القطر بين ذلك العمود ومحيط الدائرة
بدون ان يقطع المحيط

لتكن ا ب س دائرة ود مركزها و ا ب قطرها وليرسم ا ي عموداً على ا ب من النقطة ا فهو واقع خارج الدائرة



عين في ا ي اية نقطة شئت مثل ق وارسم ق د الذي يقطع المحيط في س . فمن حيث انب دا ق قائمة فهي اكبر من ا ق د (ق ٢٢ ك ١) والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩ ك ١) فاذا د ق اطول من دا ودا يعدل د س

فاذا د ق اطول من د س فالنقطة ق واقعة خارج الدائرة وهي اية نقطة كانت من المحيط ا ي فهو اذا خارج الدائرة



كذلك لا يرسم بين ي ا والمحيط خط مستقيم من النقطة ا الذي لا يقطع المحيط . ارسم غ ا في الزاوية دا ي . وارسم د ح عموداً على ا غ . فمن حيث ان د ح ا قائمة ودا ح اصغر من قائمة فالضلع د ح اقصر من الضلع دا (ق ١٩ ك ١) فالنقطة ح هي داخل الدائرة فالخط ا غ قاطع الدائرة

فرع اول . الخط العمودي على طرف قطر دائرة هو ممس الدائرة ويمسها في نقطة واحدة فقط لانه لو لاقاها في نقطتين لوقع داخل الدائرة (ق ٢٢ ك ٢) ولا يكون اكثر من مماس واحد في نقطة واحدة من الدائرة

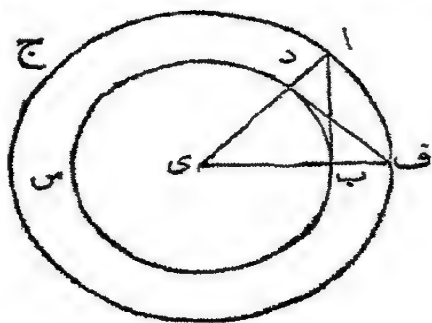
فرع ثاني . العمود على طرف القطر هو مماس للدائرة وبالقلب المماس هو عمودي على طرف القطر

فرع ثالث . مماسان من طرفي القطر هما متوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١) وبالقلب مماسان متوازيان هما عموديان على طرفي القطر

القضية السابعة عشرة . ع

علينا ان نرسم خطاً مستقيماً من نقطة مفروضة في محيط دائرة او خارج المحيط حتى يماس دائرة مفروضة

استعلم المراكزى (ق ١ ك ٢) وارسم اى واجعل اى مركزا وى ا نصف قطر
وارسم الدائرة اف ج ومن دارسم دى عمودا على اى (ق ١١ ك ١) وارسم اى ب ف
وابضا ا ب فالخط ا ب يماس الدائرة



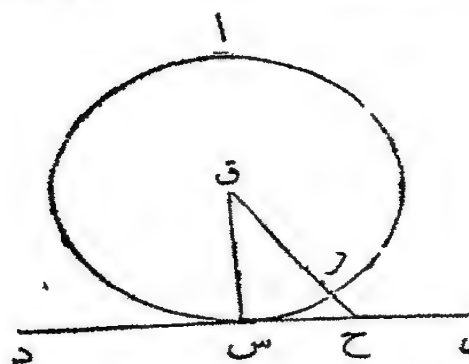
القاعدة د ف والمثلث ا ب يعدل المثلث ف ي د وبقيّة زوايا الواحد تعدل بقيّة
زوايا الآخر (ق ٤ ك ١) فالزاوية ي ب ا تعدل ي د ف ولكن ي د ف قائمة فاذا
ي ب ا قائمة ايضاً والخط ي ب قد رُسم من المركز و ا ب عمود عليه فهو اذاً مماس
(فرع ٢ ق ١٦ ك ٢) وقد رُسم من ا النقطة المفروضة

ثم اذا كانت النقطة المفروضة في محيط الدائرة مثل د فارسم دى الى المركزى وارسم د ف عموداً على طرفه فهو مماس (فرع اول ق ١٦ ك ٣)

تعليقة. متى كانت النقطة ا خارج المحيط يرسم مماسان متساويان منها لانه اذا
أخرج المماس ف د حتى يلاقي المحيط ا ج ثم اذا رُسِم خط من المركز الى نقطة الملاقاة
وأخر من ا الى موضع تقاطع الخط الاول والمحيط ب د س يحدث مثلث ذو قائمة
بعدل ا ب ي

إذا مسَّ خطٌّ مستقيم دائرةً فالخط المستقيم المرسوم من المركز إلى نقطة الماسة هو عمودٌ على الخط الماس

لتكن اس ب دائرة وليمسها الخط المستقيم دى في س . استعلم المركزق وارسم

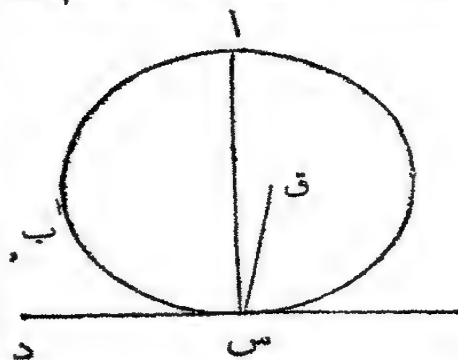


ق س فالخط المستقيم ق س انما هو عمود على
دي والا فن ق رسم ق ب ج عموداً على
دي فتكون ق ج س قائمة فتكون ج س ق
حادّة (ق ١٧ ك ١) والضلع الاطول يقابل
الزاوية الكبرى (ق ١٩ ك ١) فالضلع ق س
اطول من الضلع ق ج ولكن ق س يبدل
ق ب فاذا ق ب اطول من ق ج اعني الجزء اعظم من كله وذاك محال فلا يمكن
ان يكون ق ج عموداً على دي وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ق س فهو عمود
على دي

القضية التاسعة عشرة. ن

اذا مس خط مستقيم دائرة ورسم من نقطة الماسة خط مستقيم عموداً
على الماس فمركز الدائرة واقع في ذلك الخط العمودي

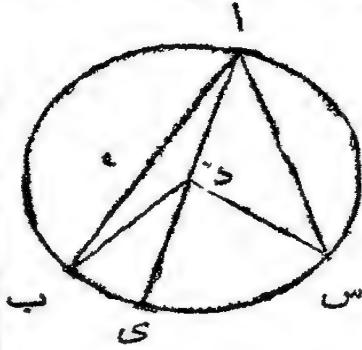
ليكن الخط المستقيم دي مماساً للدائرة ا ب س ومن نقطة الماسة س ليرسم س ا
عموداً على دي فمركز الدائرة واقع في الخط س ا
والا فلنكن ق المركز ارسم ق س فحسب
القضية السابقة ق س هو عمود على دي وق
س ي قائمة ولكن اس ي ايضاً قائمة فاذا
اس ي تعدل ق س ي اعني الكل يعدل
جزءه وذاك محال فلا يمكن ان تكون ق المركز ي
وهكذا يبرهن في كل نقطة لا تقع في الخط س ا فالمركز واقع في الخط س ا



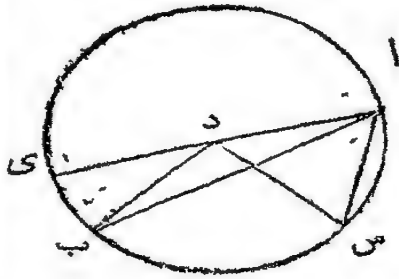
القضية العشرون. ن

الزاوية عند مركز دائرة هي مضاعف الزاوية عند المحيط اذا كانتا على
قاعدة واحدة اعني على جزء واحد من المحيط

لتكن ا ب س دائرة وب د س الزاوية عند المركز وب ا س الزاوية عند المحيط
وكلتاها على جزء واحد من المحيط ب س فالزاوية
ب د س انما هي مضاعف ب ا س



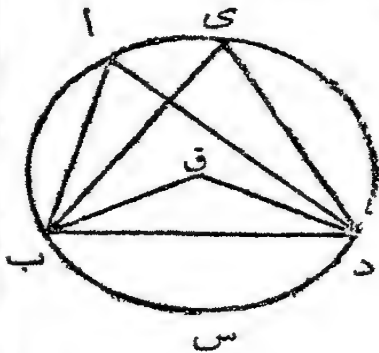
اولاً ليكن د مركز الدائرة داخل الزاوية ب ا س
ارسم ا د واخرجه الى ي. فمن حيث ان د ا يعدل
د ب فالزاوية د ا ب تعدل الزاوية د ب ا (ق ٥
ك ١) فالزاويتان د ب ا د ا ب هما مضاعف
د ا ب والزاوية ب د ي تعدل د ا ب د ب ا معاً (ق ٣٢ ك ١) فاذا ب د ي هي
مضاعف د ا ب وهكذا يبرهن ان ي د س مضاعف د ا س فالكل ب د س
مضاعف الكل ب ا س



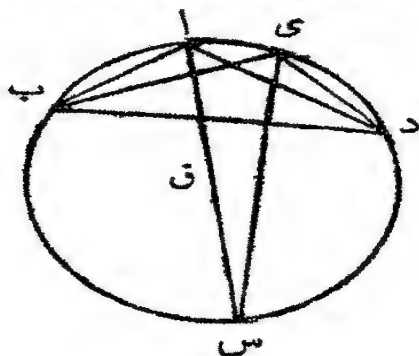
ثم ليكن المركز خارج الزاوية ب ا س. ارسم
ا د واخرجه الى ي. فيبرهن كما تقدم ان الزاوية
ي د س هي مضاعف د ا س وان ي د ب جزء
من الاولى مضاعف د ا ب جزء من الثانية فالباقية
ب د س مضاعف الباقية ب ا س

القضية الحادية والعشرون

الزوايا في قطعة واحدة من دائرة هي متساوية



لتكن ا ب س د دائرة وب ا د ب ي د
زاويتين في قطعة واحدة منها ب ا ي د فهما متساويتان
استعلم ق مركز الدائرة واولاً لتكن القطعة
ب ا ي د اكبر من نصف دائرة. ارسم ب ق د ق
فالزاوية ب ق د عند المركز هي مضاعف الزاوية
ب ا د عند المحيط لانهما على قاعدة واحدة ب س د
(ق ٢٠ ك ٢) وب ق د ايضاً مضاعف ب ي د فاذا ب ا د تعدل ب ي د



ثم اذا كانت القطعة ب ا ي د اصغر من نصف
دائرة. ارسما ق الى المركز واخرجه الى س وارسم
س ي فالقطعة ب ا د س هي اكبر من نصف دائرة
والزاويتان فيها ب ا س ب ي س متساويتان
حسباً تقدم وس ب ي د ايضاً اكبر من نصف دائرة
والزاويتان فيها س ا د س ي د متساويتان ايضاً
فالكل ب ا د يعدل الكل ب ي د

القضية الثانية والعشرون

اذا رُسم في دائرة شكل ذو اربعة اضلاع فالزاويتان المتقابلتان منه
يعدلان معاً قائمتين

ليكن ا د س ب ذا اربعة اضلاع في دائرة فكل اثنتين متقابلتين من زواياه
تعدلان معاً قائمتين. ارسما س و د ب فالزاوية
س ا ب تعدل س د ب (ق ٢١ ك ٢) والزاوية
ا س ب تعدل ا د ب فالكل ا د س يعدل
الزاويتين س ا ب ا س ب. اضف الى كل واحدة
منهما ا ب س فلنا ا ب س مع ا د س تعدل ا ب س

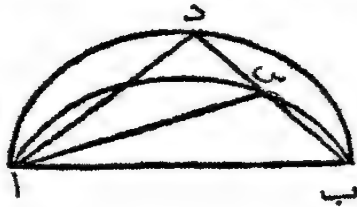
مع س ا ب مع ب س ا وهذه الثلاث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فاذا ا ب س
ا د س معاً تعدلان قائمتين. وهكذا يبرهن ان د ا ب د س ب تعدلان قائمتين
فرع اول. اذا اُخرج ضلع من شكل ذي اربعة اضلاع مرسوم في دائرة
فالزاوية الخارجة تعدل الداخلة المتقابلة

فرع ثانياً. شكل ذو اربعة اضلاع كل زاويتين متقابلتين منه لا تعدلان
قائمتين لا يرسم في دائرة

القضية الثالثة والعشرون

لا تكون قطعتان متشابهتان على جانب واحد من خطٍ مستقيم بدون ان تتطابقا

ان كان ممكناً لتكن ا س ب ا د ب قطعتين متشابهتين على جانب واحد من



الخط المستقيم ا ب وغير متطابقتين. فمن حيث ان الدائرتين ا د ب ا س ب نقاطعان في ا و ب فلا يمكن ان نقاطعا في نقطة اخرى (ق ١٠ ك ٢) وبالضرورة تقع احدى القطعتين داخل الاخرى

فلتقع ا س ب داخل ا د ب وارسم الخط ب س د وايضاً س ا و د ا. فمن حيث ان القطعتين متشابهتان اعني تحويان زوايا متساوية (حد ٩ ك ٢) فالزاوية الخارجة ا س ب تعدل الداخلة المقابلة ا د ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١)

القضية الرابعة والعشرون

قِطْعَةٌ متشابهة على خطوطٍ مستقيمة متساوية هي متساوية

لتكن اى ب س ق د قطعتين متشابهتين على خطين مستقيمين متساويين



ا ب وس دفهما متساويتان لانه اذا وضعت القطعة

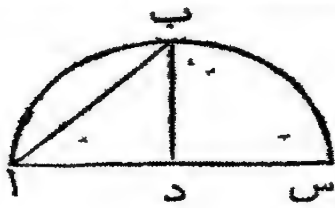
اى ب على القطعة س ق د

بحيث تقع النقطة ا على النقطة س والخط ا ب على الخط س د فالنقطة ب تقع على النقطة د لأن ا ب يعدل س د فبالضرورة تطبق القطعة اى ب على القطعة س ق د (ق ٢٢ ك ٢) فتعدلها

القضية الخامسة والعشرون

اذا فرضت قطعة من دائرة فعلينا ان نتممها

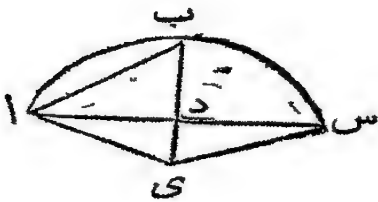
لتكن ا ب س قطعة دائرة فعلينا ان نتممها



نصف اس في د (ق ١٠ ك ١) ومن د ا رسم د ب
عموداً على اس (ق ١١ ك ١) وارسم ا ب

ثم اولا لتكن الزاويتان ا ب د ب ا د متساويتين
فالخط ا د يعدل ب د (ق ٦ ك ١) ويعدل د س ايضا

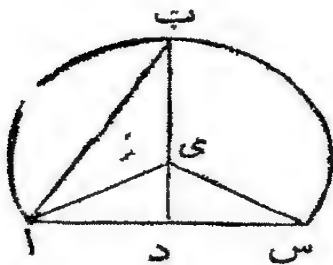
فالخطوط الثلاثة ا د ب د س هي متساوية فتكون د مركز الدائرة (ق ٩ ك ٢)
واذا جعلت د مركزاً واحداً من هذه الخطوط الثلاثة نصف قطر ثم الدائرة التي
كانت ا ب س قطعة منها. ومن حيث ان المركز واقع في اس فالقطعة ا ب س
انما هي نصف دائرة



ثم لتكن الزاويتان ا ب د ب ا د غير متساويتين
ارسم الزاوية ب ا ي حتى تعدل ا ب د (ق ٢٣ ك ١)

وان لزم فاخرج ب د الى ي وارسم ي س. فن حيث
ان ب ا ي تعدل ا ب ي فالخط ا ي يعدل ب ي

(ق ٦ ك ١) ومن حيث ان ا د يعدل د س ود ي مشترك بين المثلثين ا د ي س
د ي فالضلعان ا د د ي يعدلان الضلعين س د د ي اعني كل واحد يعدل
نظيرة والزاوية ا د ي تعدل س د ي لانها قائمتان فالقاعدة ا ي تعدل القاعدة
ي س (ق ٤ ك ١) و ا ي يعدل ب ي حسباً تقدم فالخطوط الثلاثة ا ي ب ي س
ي متساوية وي مركز الدائرة (ق ٩ ك ٢) التي كانت ا ب س قطعة منها واذا كانت
الزاوية ا ب د اكبر من ب ا د فالامر واضح ان المركز واقع خارج القطعة ا ب س
اعني انما اصغر من نصف دائرة

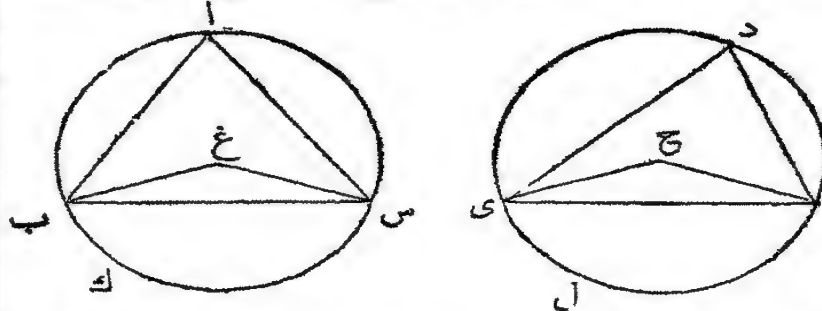


واذا كانت ا ب د اصغر من ب ا د فالمركز واقع
داخل القطعة اعني هي اكبر من نصف دائرة وهكذا
الدائرة اذا قُرِصَتْ قطعة منها

القضية السادسة والعشرون

زوايا متساوية في دوائر متساوية هي على اقواس متساوية ان كانت تلك
الزوايا في المركز او في المحيط

لتكن ا ب س دى ف دايرتين متساويتين وب غ س ي ح ف زاويتين



متساويتين في

المركز . وب ا س

ى د ف زاويتين

متساويتين في ف

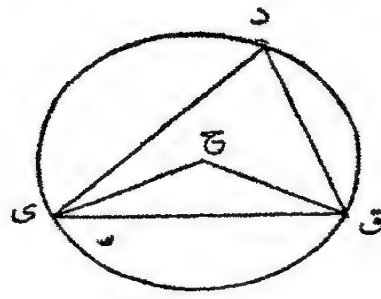
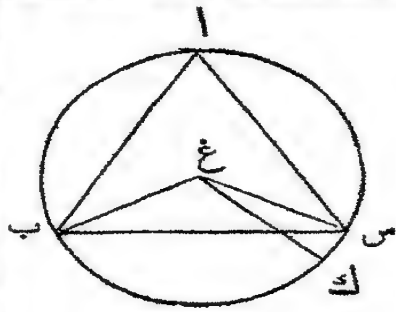
المحيط . فالقوس ب

ك س يعدل القوس ل ف ارسم الوترين ب س ي ف . فمن حيث ان الدائرتين
متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزيهما متساوية . فالخطان ب غ س
يعدلان ي ح ح ف والزاوية ب غ س تعدل ي ح ف فالقاعدة ب س تعدل
القاعدة ي ف (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالقطعة
ب ا س تشابه القطعة ي د ف (حد ٩ ك ٣) وهما على الخطين المتساويين ب س
ى ف والقطع المتشابهة على خطوط متساوية هي متساوية (ق ٤ ك ٢) فالقطعة
ب ا س تعدل القطعة ي د ف . ولكن كل الدائرة ب ا س تعدل الكل ي د ف
فالبقية ب ك س تعدل البقية ي ل ف

القضية السابعة والعشرون

زوايا واقعة على اقواس متساوية في دوائر متساوية هي متساوية ان
كانت في المركز او في المحيط

في الدايرتين المتساويتين ا ب س دى ق لتكن الراويتان في المركز ب غ س



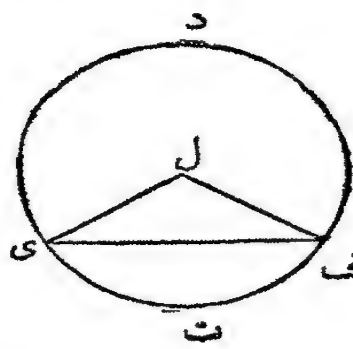
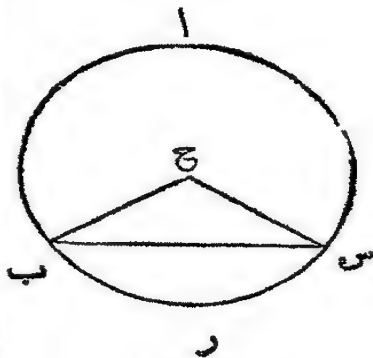
ي ح ق والزويتان
في المحيط ب ا س
ي د ق على القوسين
المتساويين ب س ي
ق فالزاوية ب غ س

تعديل ي ح ق وب ا س تعديل ي د ق

الزاوية ب غ س اذا عدلت ي ح ق فالامر واضح (ق ٢٠ ك ٢) ان ب ا س
تعديل ي د ق والا فتكون احدها اكبر من الاخرى. لتكن ب غ س اكبرها وعلى
النقطة غ من الخط المستقيم ب غ ا رسم الزاوية ب غ ك حتى تعديل ي ح ق (ق ٢٢
ك ١). فمن حيث ان الزوايا المتساوية عند المركز هي على اقواس متساوية (ق ٢٦
ك ٢) فالقوس ب ك يعدل القوس ي ق. وقد فرض ان ي ق يعدل ب س
فالقوس ب ك يعدل ب س ايضاً اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال. فلا يمكن
ان تكون ب غ س ي ح ق غير متساويتين ايها متساويتان. والزاوية عند ا هي
نصف الزاوية ب غ س والزاوية عند د هي نصف ي ح ق فالزاوية عند ا تعديل
الزاوية عند د

القضية الثامنة والعشرون ن

خطوط مستقيمة متساوية في دوائر متساوية تقطع اجزاء متساوية الاكبر
يعديل الاكبر والاصغر يعدل الاصغر



ليكن ب س
ي ف خطين مستقيمين
متساويين في دائرتين
متساويتين ا ب س
د ي ف وليقطعا
القوسين الاكبرين

ب ا س ي د ف والاصغرين ب ر س ي ت ف فالقوس ب ا س يعدل ي د ف

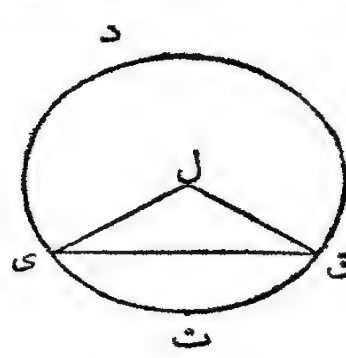
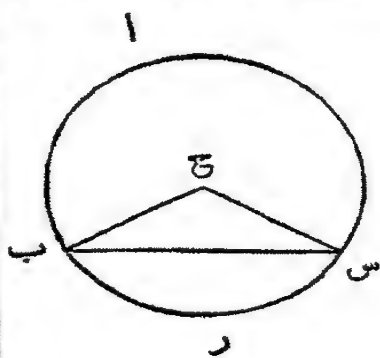
وب رس يعدل ي ت ف

استعلم المركزين ح ول (ق ١ ك ٣) وارسم ح ب ح س ل ي ل ف. فن
حيث ان الدائرتين متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزيهما
هي متساوية فالخطان ب ح ح س يعدلان ي ل ل ف. وقد فرض ان القاعدة
ب س تعدل القاعدة ي ف فالزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ف (ق ٨ ك ١)
والزاويا المتساوية عند المركز هي على اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٣) فالقوس ب رس
يعدل القوس ي ت ف والدائرة ا ب س تعدل الدائرة د ي ف فالباقي ب ا س
يعدل الباقي ي د ف

القضية التاسعة والعشرون

اقواس متساوية في دوائر متساوية تقابلها خطوط مستقيمة متساوية

لكن ا ب س د ي ق دائرتين متساويتين والاقواس ب رس ي ت ق



متساويتين فالخطان
المستقيمان المقابلان لهما
ب س ي ق ايضاً
متساويان
استعلم المركزين
ح ول (ق ١ ك ٣)

وارسم ح ب ح س ل ي ل ق. فن حيث ان القوس ب رس يعدل القوس
ي ت ق والزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ق (ق ٢٧ ك ٣) وح ب ح س
يعدلان ي ل ق لانها أنصاف اقطار دائرتين متساويتين فالقاعدة ب س
تعدل القاعدة ي ق (ق ٤ ك ١)

القضية الثلاثون

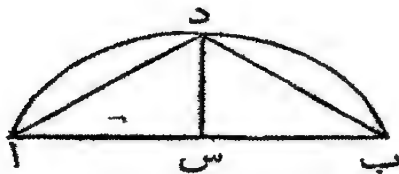
علينا ان ننصف قوساً مفروضاً اي ان نقسمه الى قسمين متماثلين

ليكن ا د ب القوس المفروض . فعلينا ان نصفه

ارسم ا ب ونصفه في س (ق ١٠ ك ١) وارسم

س د عموداً على ا ب وارسم ا د ب فقد تنصف

القوس ا د ب في النقطة د



لان اس يعدل س ب وس د مشترك بين المثلثين اس د ب س د والزاوية

اس د تعدل الزاوية ب س د لأن كل واحدة منهما قائمة فالقاعدة ا د تعدل القاعدة

ب د (ق ٤ ك ١) والمحاط المستقيمة المتساوية تقطع اقواساً متساوية (ق ٢٨ ك ٣)

والأكبر يعدل الأكبر والأصغر يعدل الأصغر وكل واحد من ا د ب د اصغر من

نصف دائرة لأن د س يمر بالمركز (فرع ق ١ ك ٢) فالقوس ا د يعدل القوس د ب

فقد تنصف ا د ب في د

تعليقة . وعلى هذه الكيفية كل واحد من النصفين ا د ب يتنصف ايضاً

فيقسم قوس مفروض الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءاً متساوية وهلم جرا

القضية السادسة والثلاثون

الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي قائمة والمرسومة في قطعة أكبر من

نصف دائرة هي اصغر من قائمة والمرسومة في قطعة اصغر من نصف

دائرة هي أكبر من قائمة

لتكن ا ب س د دائرة وب س قطرها وي مركزها . ارسم س ا الذي يقسم

الدائرة الى قطعتين ا ب س ا د س وارسم ب ا

ا د د س . فالزاوية في نصف الدائرة ب ا س هي

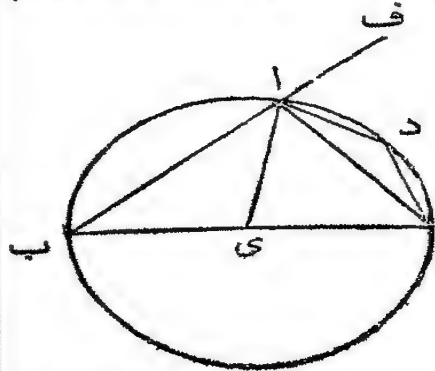
قائمة والزاوية في القطعة ا ب س التي هي أكبر من

نصف الدائرة فاصغر من قائمة والزاوية في القطعة س

ا د س التي هي اصغر من نصف الدائرة فأكبر من قائمة

ارسم ا ي واخرج ب الى ف . فمن حيث

ا ب س ي يعدل ا ي فالزاوية ا ب س ي ا (ق ٥ ك ١) ولأن س ي

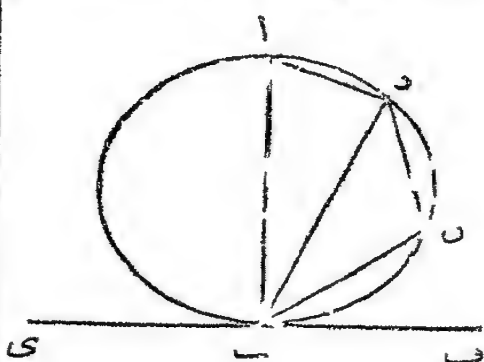


يعدل اى فالزاوية \angle س ا يعدل \angle ا س فالكل \angle ب ا س يعدل الزاويتين
 \angle ا ب س \angle ا س ب، ولكن الزاوية \angle ا س الخارجة من المثلث \angle ا ب س تعدل
الزاويتين \angle ا ب س \angle ا س ب (ق ٢٣ ك ١) فالزاوية \angle ا س تعدل \angle ا س وكل
واحدة منهما قائمة (حد ٢ ك ١) فالزاوية \angle ا س في نصف الدائرة انما هي قائمة
ومن حيث ان الزاويتين \angle ا ب س \angle ا س من المثلث \angle ا ب س هما معاً اقل
من قائمتين (ق ١٢ ك ١) وب \angle ا س قائمة فتكون \angle ا ب س اصغر من قائمة فالزاوية
في القطعة \angle ا ب س التي هي اكبر من نصف دائرة هي اصغر من قائمة
ومن حيث ان \angle ا ب س د هو ذو اربعة اضلاع في دائرة فكل اثنين من
زواياها المتقابلة تعدلان قائمتين (ق ٢٢ ك ٢) فالزاويتان \angle ا ب س \angle ا د س تعدلان
معاً قائمتين وقد تبرهن ان \angle ا ب س اصغر من قائمة فتكون \angle ا د س اكبر من قائمة
فرج. يتضح من هذه القضية ان زاوية واحدة من مثلث ان عدلت بمجتمع الاخرين
فهي قائمة لان الزاوية التي تليها تعدل الاخرين ايضاً ومتي كانت الزاويتان
المتواليتان متساويتين فكل واحدة منهما قائمة

القضية الثانية والثلاثون

اذا مس خط مستقيم دائرة ورسم من نقطة الماسة خط مستقيم قاطع
الدائرة فالزوايا الحادثة بين الماس والقاطع تعدل الزوايا في القطع
المتبادلة من الدائرة

ليكن الخط المستقيم γ ف مماساً للدائرة \angle ا ب س γ ومن γ نقطة الماسة يرسم



الخط المستقيم β د قاطعها فالزاوية \angle ف ب د
تعدل الزاوية في القطعة \angle د ا ب المتبادلة
والزاوية \angle د ب س تعدل الزاوية في القطعة
 \angle ب س د المتبادلة

من النقطة β ارسم β ا عموداً على γ

ف (ق ١١ ك ١) وفي القوس β د β س انة

نقطة شئت كالنقطة س وارسم الخطوط المستقيمة ا د د س س ب . فمن حيث ان
الخط المستقيم ي ف يمس الدائرة ا ب س د في النقطة ب وقد رُسم ب ا عموداً على
المماس من نقطة الماسة فمركز الدائرة في الخط ب ا (ق ١٩ ك ٢) والزاوية ا د ب هي
في نصف دائرة وهي قائمة (ق ٢١ ك ٢) والزاويتان الاخرتان د ا ب ا ب د تعدلان
قائمة (ق ٢٢ ك ١) والزاوية ا ب ف قائمة فتعدل الزاويتين ب ا د ا ب د . اطرح
الزاوية المشتركة ا ب د فالباقية د ب ف تعدل الباقية ب ا د في القطعة المتبادلة
من الدائرة . ومن حيث ان الشكل ا ب س د ذو اربعة اضلاع في دائرة فالزاويتان
المتقابلتان ب ا د ب س د معاً تعدلان قائمتين (ق ٢٢ ك ٢) ولذلك تعدلان
ايضاً د ب ف د ب ي (ق ١٢ ك ١) وقد تبرهن ان د ب ف تعدل ب ا د فالباقية
د ب ي تعدل الباقية ب س د في القطعة المتبادلة من الدائرة

القضية الثالثة والثلاثون ع

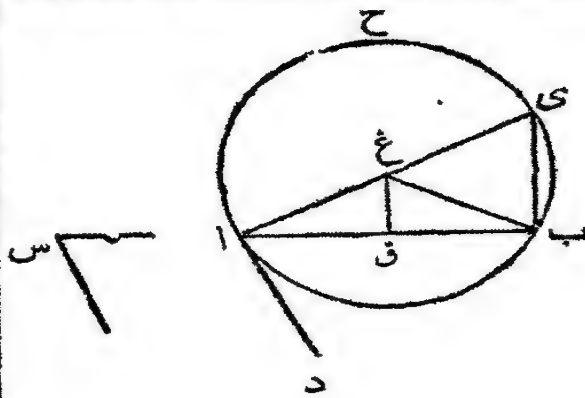
علينا ان نرسم على خطٍ مستقيم مفروض قِطْعَةً دائرية فيها زاوية تعدل
زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس الزاوية المفروضة . علينا ان نرسم على ا ب
قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية عند س
اولاً لتكن الزاوية عند س قائمة .



نصّف ا ب في ف (ق ١٠ ك ١) ثم اجعل
ف مركزاً وف ب بعداً وارسم الدائرة ا ح ب فالزاوية ا ح ب انما هي قائمة لانها في
صف دائرة (ق ٢١ ك ٢) وهي تعدل الزاوية القائمة عند س

ثانياً ان لم تكن الزاوية س قائمة فعند النقطة ا من الخط ا ب اجعل الزاوية
ب ا د تعدل س (ق ٢٢ ك ١) ومن النقطة ا رسم ا ي عموداً على ا د (ق ١١ ك ١)



نصِّفْ ا ب في ق (ق ١٠ ك ١) ومن
ق ا رسم ق غ عموداً على ا ب (ق ١١
ك ١) وارسم غ ب. فمن حيث ان
ا ق يعدل ق ب و ق غ مشترك بين
المثلثين ا ق غ ب ق غ فالضلعان
ا ق ق غ يعدلان الضلعين ب ق
ق غ والزوايا ا ق غ تعدل ب ق غ

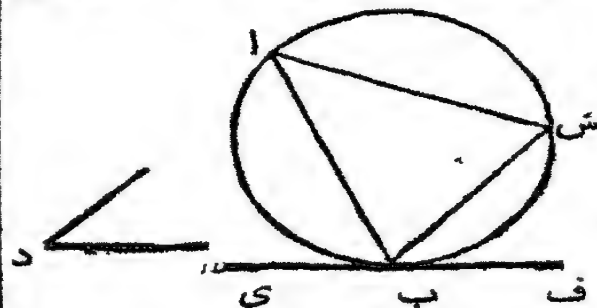
فالقاعدة ا غ تعدل القاعدة غ ب (ق ٤ ك ١) والدائرة المرسومة على المركز غ وعلى
البعد غ ا تمر في النقطة ب. فلتكن ا ح ب
هذه الدائرة. فمن حيث انه قد رُسم ا د عموداً
من طرف القطر ا ي فهو مماس الدائرة
(فرع اول ق ١٦ ك ٢) ومن حيث انه قد
رُسم القاطع ا ب من نقطة المماس ف الزاوية

د ا ب تعدل الزاوية في القطعة ا ح ب المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢) والزاوية د ا ب تعدل
الزاوية عد س فالزاوية عند س تعدل الزاوية في القطعة ا ح ب. فقد رُسم على
الخط المستقيم المفروض ا ب قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند س

القضية الرابعة والثلاثون ع

علينا ان نقطع من دائرة مفروضة قطعة فيها زاوية تعدل زاوية بسيطة
مفروضة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود الزاوية البسيطة المفروضة. علينا ان نقطع



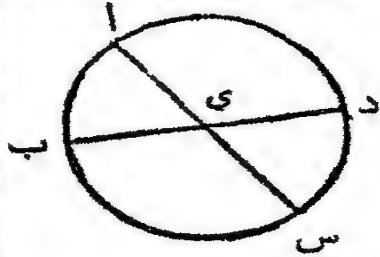
من الدائرة ا ب س قطعة فيها زاوية
تعدل الزاوية عند د. ارسم المماس ي ف
(ق ١٧ ك ٢) حتى يمس الدائرة في النقطة
ب ومن النقطة ب في الخط ي ف
اجعل الزاوية ف ب س تعدل د

(ق ٢٣ ك ١) فمن حيث ان الخط المستقيم ي ف يمس الدائرة ا ب س وقد رُسم من نقطة الماسة الخط ب س قاطعاً فالزاوية ف ب س تعدل الزاوية في القطعة ب ا س المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢) والزاوية ف ب س تعدل الزاوية عند د فالزاوية في القطعة ب ا س تعدل الزاوية عند د فقد قُطعت من الدائرة ا ب س القطعة ب ا س فيها زاوية تعدل الزاوية المفروسة عند د

القضية الخامسة والثلاثون

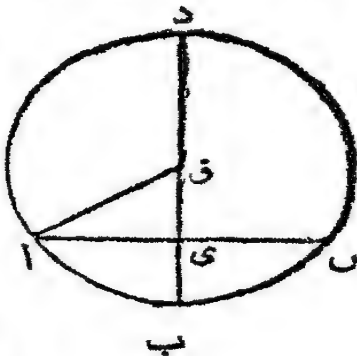
اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة فالقائم الزوايا مسطح قسما احدها يعدل القائم الزوايا مسطح قسما الآخر

ليتقاطع الخطان المستقيمان ا س ب د في الدائرة ا ب س د في النقطة ي فالقائم الزوايا ا ي في ي س يعدل القائم الزوايا ب ي في ي د



اذا مر كل واحد منها في المركز وكان ذلك المركز ي فالامر واضح ان الخطوط ا ي س ب ي ي د متساوية والقائم الزوايا ا ي في ي س يعدل القائم الزوايا ب ي في ي د

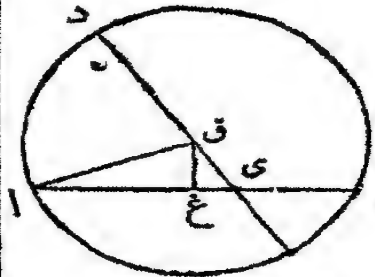
ثم لنفرض مرور احدها ب د في المركز وليكن عموداً على الاخر ا س الذي لا



يمر بالمركز وليقطعه في النقطة ي. فاذا تنصف ب د في ق فالنقطة ق هي مركز الدائرة (فرع ق ١ ك ٣) ارم ا ق. فمن حيث ان الخط ب د المار بالمركز هو عمود على ا س الذي لا يمر بالمركز ويقطعه في ي فالقسمان ا ي س س متساويان (ق ٢ ك ٣) ومن حيث ان الخط المستقيم ب د قد انقسم الى قسمين متساويين في ق

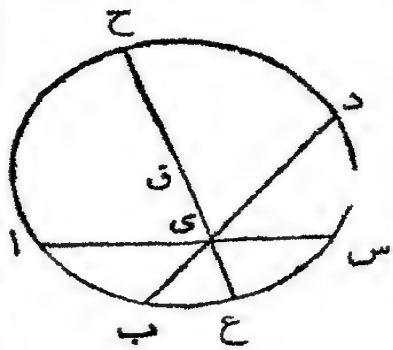
وغير متساويين في ي (ق ٥ ك ٣) فالقائم الزوايا ب ي ي ق = ق ي ق = ق ب = ا ق ولكن ا ق = ا ي + ي ق (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ب ي ي ق + ق ي ق = ق ب + ا ي + ي ق

ي ق = ا ي + ي ق . اطرح ي ق من الجانبين فالباقي ب ي \times ي د = ا ي
 = ا ي \times ي س



ثم لنفرض ان ب د الذي يمر بالمركز يقطع ا س
 الذي لا يمر بالمركز في النقطة ي ولكنه ليس عموداً
 عليه . فاذا تنصف ب د في ق فالنقطة ق هي مركز
 الدائرة . ارسم ا ق ومن ق ارسم ق غ عموداً على ا س
 (ق ١٢ ك ١) فالنسماع يعدل القسم غ س (ق ٢ ك ٢)

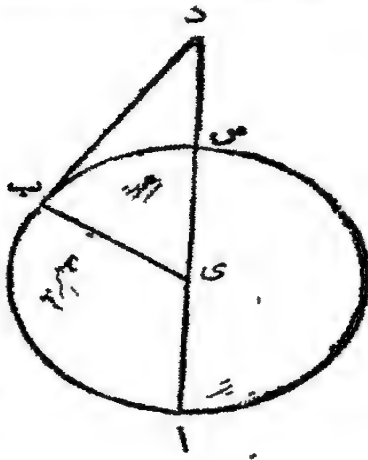
فالقائم الزوايا ا ي \times ي س + ي ع = ا غ . اضف اليها غ ق فالقائم الزوايا ا ي
 \times ي س + ي ع + ي غ ق = ا غ + غ ق + غ ق = ا ق + و ي غ + غ ق
 = ي ق فالقائم الزوايا ا ي \times ي س + ي ق = ا ق = ق ب . وق ب = ب ي
 \times ي د + ي ق (ق ٥ ك ٢) فالقائم الزوايا ا ي \times ي س + ي ق = ب ي \times ي
 ي د + ي ق . اطرح ي ق من الجانبين فالباقي ا ي \times ي س = ب ي \times ي د



اخبراً ان لم يمر احد الخطين المستقيمين ا س
 ب د في المركز فاستعلم المركز ق ومن ي نقطة
 تقاطع الخطين ا س ب د ارسم القطر غ ي ق ح
 فكما تقدم ا ي \times ي س = ع ي \times ي ح وب ي
 \times ي د = ع ي \times ي ح فحسب الاولى الاولى ا ي
 \times ي س = ب ي \times ي د

القضية السادسة والثلاثون . ن

اذا رسم من نقطة خارج دائرة خطان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة
 والاخر يمسها فالقائم الزوايا مسطح كل الخط القاطع في القسم منه الواقع
 خارج الدائرة يعدل مربع الخط المماس

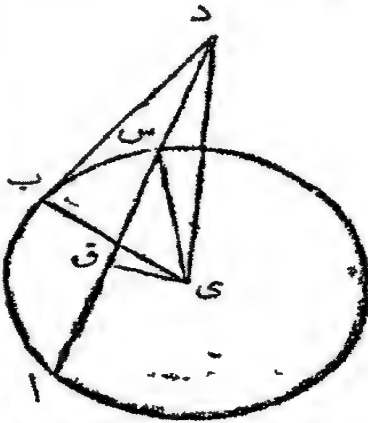


لكن د نقطة خارج الدائرة ا ب س وليرسم منها
الخط المستقيم د س ا حتى يقطع الدائرة والخط المستقيم
د ب حتى يمسها فالقائم الزوايا ا د س د س يعدل مربع
د ب

اولاً لنفرض ان د س ا يمر بالمركز ا رسم ي ب
فالزاوية ي ب د انما هي قائمة (ق ١٨ ك ٢) ومن حيث
ان الخط المستقيم ا س قد تنصف في ي واخرج الى د
فالقائم الزوايا ا د س د س + ي س = ي د (ق ٦ ك ٢)

وي س = ي ب فالقائم الزوايا ا د س د س + ي ب = ي د ولكن ي د = ي ب
+ ب د (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ا د س د س + ي ب = ي ب + ب د ا طرح
من الجانبين ي ب فالباقي ا د س د س = ب د

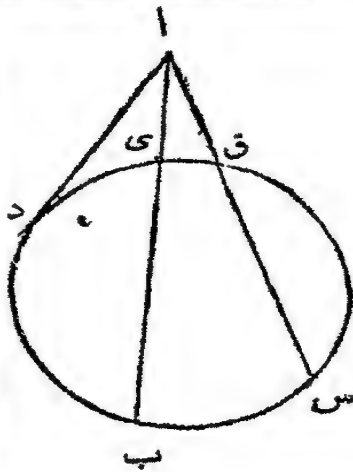
ثانياً ان لم يمر د س ا في مركز الدائرة ا ب س فاستعلم المركز ي (ق ١ ك ٢)



وارسم ي ق عموداً على ا س (ق ١٢ ك ١) وارسم ي ب
ي س ي د . فمن حيث ان الخط المستقيم المار بالمركز
ي ق هو عمود على الخط المستقيم ا س الذي لا يمر
بالمركز فهو ينصفه ايضاً (ق ٢ ك ٢) فالقسم ا ق يعدل
القسم ق س . فمن حيث ان الخط المستقيم ا س قد
تنصف في ق واخرج الى د (ق ٦ ك ٢) فالقائم الزوايا
ا د س د س + ق س = ق د . اضف اليها ق ي فالقائم

الزوايا ا د س د س + ق س + ق ي = ق ي + ق د + ق ي وي س = ق س + ق ي
وي د = ق د + ق ي (ق ٤٧ ك ١) لان د ق ي قائمة . فالقائم الزوايا ا د س د س
+ ي س = ي د . ومن حيث ان ي ب د قائمة ي د = ي ب + ب د = ي س
+ ب د فالقائم الزوايا ا د س د س + ي س = ي س + ب د + ب د = د س +
ب د

فرع اول . اذا رسم من نقطة خارج دائرة خطان فاطعان مثل ا ب ا س



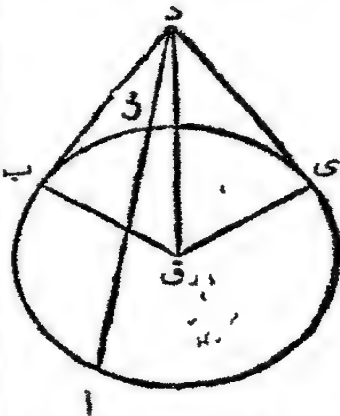
فالشكلان القائم الزوايا مسطحا كل خط في القسم منه
الواقع خارج الدائرة هما متساويان فالقائم الزوايا ب ا
 \times ا ي = س ا \times ا ق لان كل واحد منهما يعدل مربع
الخط المستقيم ا د الذي يمس الدائرة
فرع ثانٍ . مماسان مرسومان من نقطة واحدة هما
متساويان

فرع ثالث . بما ان نصف القطر الواقع على
نقطة الماسة هو عمود على الماس فبالضرورة الزاوية
الواقعة بين مماسين مرسومين من نقطة واحدة تنصف
مركز الدائرة الى تلك النقطة لانه وتر مشترك بين مثلثين متساويين قائي الزاوية

القضية السابعة والثلاثون .

اذا رسم من نقطة خارج دائرة خطان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة
والاخر يلاقيها فالقائم الزوايا مسطح كل الخط القاطع في الجزء منه
الواقع خارج الدائرة ان عدل مربع الخط الذي يلاقيها فذلك الخط
ماس الدائرة

لتكن د نقطة خارج الدائرة ا ب ي وليرسم منها الخط المستقيم د س ا حتى
يقطع الدائرة والخط المستقيم د ب حتى يلاقيها فالقائم
الزوايا ا د \times د س ان عدل مربع د ب فالخط د ب
يمس الدائرة



ارسم الخط المستقيم د ي حتى يمس الدائرة (ق ١٧ ك)
واستعلم المركز ق وارسم ق ب ق د ق ي فالزاوية
ق ي د قائمة (ق ١٨ ك) ومن حيث ان د ي يمس
الدائرة ا ب س و د س ا يقطعها فالقائم الزوايا ا د \times

د س يعدل مربع د ي (ق ٢٦ ك) وقد فرض ان القائم الزوايا ا د \times د س يعدل

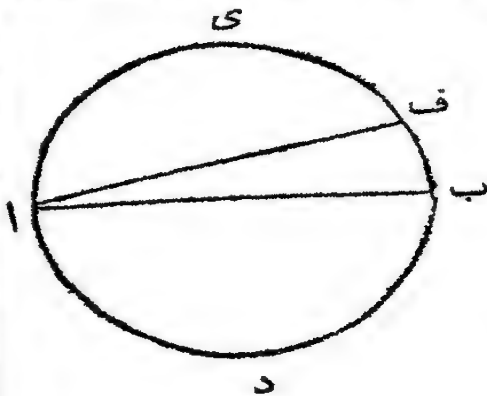
مربع د ب ق مربع دى يعدل مربع د ب والخط المستقيم دى يعدل الخط المستقيم
د ب . وقى = ق ب فالخطان دى قى يعدلان د ب ب ق والقاعدة د ق
مشتركة بين المثلثين د ب ق دى ق فالزاوية دى ق تعدل الزاوية د ب ق
رق ٨ ك ١) ولكن دى ق انما هي قائمة فالزاوية د ب ق ايضا قائمة وب ق اذا
أخرج يكون قطراً للدائرة والخط الذي يُحدث مع القطر من طرفي زاوية قائمة فهو
يسس الدائرة (ق ١٦ ك ٢) فالخط د ب هو مماس الدائرة ا ب س

مضافات الى الكتاب الثالث

قضية ١٠٠

قطر الدائرة يقسمها ومحيطها الى قسمين متماثلين . وبأقلب الخط الذي
يقسم الدائرة الى قسمين متماثلين هو قطر

ليكن ا ب قطر الدائرة اى ب د فالقسمان اى ب ا د ب متماثلان محيطاً
ومساحةً . فان وضع الشكل اى ب على الشكل
ا د ب وبقيت قاعدتهما المشتركة ا ب على
وضعها فالخط المحي اى ب يقع على الخط
المعني ا د ب وإلا لكأت في احدهما نقطتان
مختلفة البعد عن المركز وذلك خلاف حد الدائرة
وبأقلب الخط الذي يقسم الدائرة الى
قسمين متماثلين هو قطر

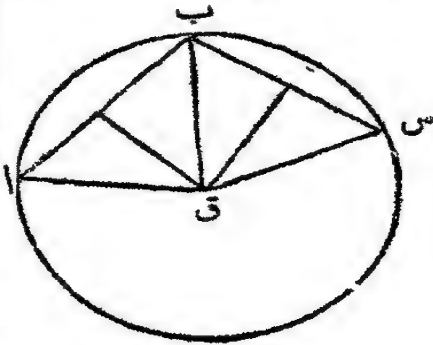


لنفرض ان ا ب يقسم الدائرة اى ب د الى قسمين متماثلين فان لم يكن المركز
في ا ب فليُرسَم ا ف ماراً في المركز . فهو اذاً قطر ويقسم الدائرة الى قسمين متماثلين .
فالقسم اى ف يعدل القسم اى ف ب وذلك محال
فرع . قوس وتره قطر هو نصف محيط . والشكل المحاط بهذا القوس مع وتره
هو نصف دائرة

قضية ب. ن

يمكن ان تُرسم دائرة واحدة محيطها مارٌ بثلاث نُقطٍ مفروضة ان لم تكن في خطٍّ واحدٍ مستقيم. ولا تُرسم الا دائرة واحدة محيطها ما زب هذه النقط الثلاث

لتكن ا ب س النقط الثلاث المفروضة ولا تكون في خطٍّ واحدٍ مستقيم فهي في محيط دائرة واحدة



ارسم ا ب وب س وتصنّفها في دوى بالعمودين د ق ي ق اللذين لا بدّ من التقائهما في نقطة ما كالنقطة ق. لأنّه لو كانا متوازيين لكان د ب ب ي متوازيين ايضاً (فرع ٢ ق ٢٩ ك ١) او كانا في خطٍّ واحدٍ مستقيم ولكنهما

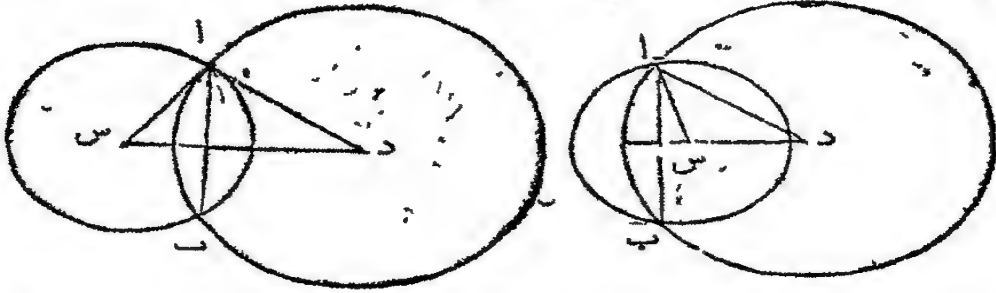
التقيا في ب و ا ب س ليس خطّاً مستقيماً حسب المفروض اولاً. ارسم ق ا ق س ق ب. فمن حيث ان ق ا ق ب يلاقيان ا ب على بعدٍ واحدٍ من العمود فهما متساويان. ولهذا السبب ق ب ق س متساويان ايضاً فالنقط الثلاث ا ب س هي على بعدٍ واحدٍ من النقطة ق وواقعة في محيط دائرة مركزها ق ونصف قطرها ق والامر واضح انه لا يمر بهذه النقط محيطٌ آخر. لأنّ المركز واقع في العمود د ق الذي ينصف الوتر ا ب. وهو ايضاً في العمود ق ي الذي ينصف الوتر ب س (فرع ١ ق ٢ ك ٢) فلا بدّ من وقوعه عند نقطة تقاطع هذين العمودين وحيث لا يكون الا مركز واحد لا يكون الا محيط واحد

قضية ج. ن

اذا تقاطعت دائرتان فالخطُّ المستقيم المارٌّ بمركزيهما هو عمودٌ على الوتر الموصل بين نقطتي التقاطع وينصفه

ليكن س د الخط المستقيم الموصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين. فهو

عموداً على الوتر ا ب الموصل بين نقطتي التقاطع



لأن
الخط ا ب
الموصل
بين
نقطتي

التقاطع هو وتر مشترك بين الدائرتين وإذا رسم عموداً من وسط هذا الوتر يمر بكل واحد من المركزين س ود (فرع ا ق ٢ ك ٢) ولا يمكن ان يرسم أكثر من خط واحد مستقيم ماراً بنقطتين مفروضتين. فالخط المار بمركزيهما ينصف الوتر ويحدث معه قائمتين أي يكون عموداً عليه

فرع ٢. الخط المستقيم الموصل بين نقطتي تقاطع دائرتين هو عموداً على الخط المستقيم الموصل بين مركزيهما

تعليقة. أولاً. اذا تقاطعت دائرتان فالبعد بين مركزيهما هو اقصر من مجموع نصفي قطريهما. ونصف القطر الاطول هو اقصر من مجموع نصف القطر الاقصر مع البعد بين المركزين. لأن س د هو اقصر من س ا + ا د (ق ٢٠ ك ١) و ا د > س ا + س د

ثانياً. بالقلب. اذا كان البعد بين مركزي دائرتين اقل من مجموع نصفي قطريهما وكان نصف القطر الاطول اقصر من نصف القطر الاقصر مع البعد بين المركزين فالدائرتان تتقاطعان

لأنه لكي يكون التقاطع ممكناً يلزم ان يكون المثلث س ا د ممكناً ولذلك يلزم ان يكون س د > س ا + ا د وان يكون نصف القطر الاطول ا د > س ا + س د. واذا كان المثلث س ا د ممكناً فالامر واضح ان الدائرتين المرسومتين على المركزين س ود تتقاطعان في ا و ب

فرع اول. اذا كان البعد بين مركزي دائرتين أكثر من مجموع نصفي قطريهما فالدائرتان لا تتقاطعان

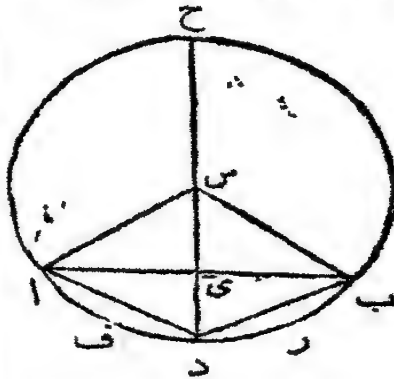
فرع ثان. اذا كان البعد بين المركزين اقل من فضله نصفي القطرين فالدائرتان لا تتقاطعان. لأن س ا + س د < ا د فاذا س د < ا د - س ا أي ضلع من مثلث

هو أطول من فضلة الضلعين الآخرين. فالمثلث غير ممكن متى كان البعد بين المركزين أقل من فضلة نصفي القطرين فلا يمكن عند ذلك أن تقاطع الدائرتان

قضية د. ن

في دائرة واحدة الزوايا المتماثلة في المركز تقابلها أقواس متماثلة وبالقلب الأقواس المتماثلة تقابل الزوايا المتماثلة في المركز

لتكن س مركز الدائرة. والزوايا اس د فلتعدل ب س د. فالقوس ا ف د الذي يقابل الزاوية الواحدة يعدل القوس ب ر د الذي يقابل الزاوية الأخرى



ارسم ا د و د ب. فالمثلثان اس د ب س د هما متساويان لأن ضلعين وزاوية من الواحد تعدل ضلعين وزاوية من الآخر فاذا وُضع احدهما على الآخر يتطابقان والنقطة ا تقع على النقطة ب. والنقطة د انما هي مشتركة بين القوسين. فطرفا

القوس ا ف د يقعان على طرفي القوس ب ر د فلا بد من مطابقة بقية اجزائها لأنها على بُعد واحد من المركز

وبالقلب لنفرض مساواة القوسين ا ف د ب ر د. فالزاوية اس د = ب س د. لأنه اذا وُضع احد القوسين على الآخر يتطابقان. وطرفا الوتر ا د يقعان على طرفي الوتر ب د فالوتران متساويان (ق ٨ ك ١) والزاوية اس د = ب س د

فرع أول. الزوايا المتساوية في المركز يقابلها اوتار متساوية. وبالقلب الاوتار المتساوية تقابل زوايا متساوية في المركز

فرع ثاني. الاوتار المتساوية تقابل اقواساً متساوية. وبالقلب الاقواس المتساوية تقابل اوتاراً متساوية

فرع ثالث. اذا تنصفت الزاوية في المركز فالقوس والوتر اللذان يقابلانها ينصفان ايضاً

فرع رابع. العمود على وسط الوتر ينصف الزاوية في المركز ويمر ايضاً بوسط

القوس الذي يقابله الوتر

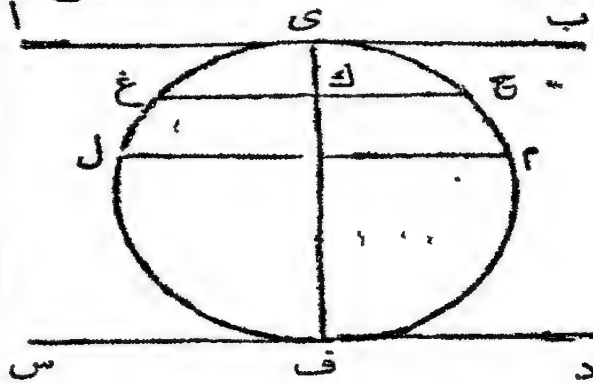
تعليقة. المركز س والنقطة ي التي هي وسط الوتر ا ب والنقطة د التي هي وسط القوس الذي يقابله الوتر المذكور هي تلك نُقْط في خطٍ عموديٍّ على الوتر. ولكن الخط المستقيم يتعين وضعه بنقطتين. فكل خط يمرُّ باثنتين من هذه النقط الثلاث يمرُّ بثالثها ايضاً ويكون عموداً على الوتر

قضية ٥٠

قوسان بين خطين متوازيين هما متساويان. وبالعكس اذا وقع بين خطين مستقيمين غير متقاطعين في الدائرة قوسان متساويان فالخطان متوازيان

لهذه القضية ثلاثة احوال

الاول متى كان الخطان المتوازيان مماسين مثل ا ب و س د. فكل واحد من القوسين بينهما نصف دائرة لأنَّ نقطتي الماسة هما طرفا القطر (فرع ٢ ق ١٦ ك ٣)
الثاني متى كان احد الخطين مماساً مثل ا ب والاخر وراً مثل غ ح. وهو عمود على ف ي الذي ينصف القوس غ ي ح (فرع ٤ ق د ك ٣) فالقوسان بينهما غ ي ح ي متساويان



ثالثاً متى كان الخطان المتوازيان

وترين مثل غ ح ول م

فلنفرض ان القطر ف ي عمود

على غ ح. فيكون عموداً على ل م ايضاً

لانها متوازيان. والقطر ينصف كل

واحد من القوسين اللذين يقابلان هذين الوترين اي غ ي = ح ي ول ي = م ي

فبالضرورة ل ي = غ ي م ي = ح ي اي غ ل = ح م

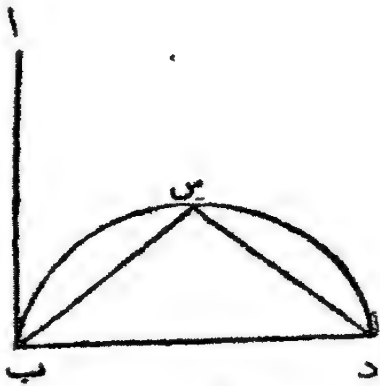
ثم بالقلب. اذا كان الخطان ا ب س د مماسين وكان القوسان ي ل ف ي م ف

متساويين يكون ي ف قطرًا (ق ١ ك ٣) و ا ب س د متوازيين (فرع ٢ ق ١٦ ك ٣)

وإذا كان أحدهما $اب$ مماساً والآخر $ح$ قاطعاً وكان القوسان $ي غ ي ح$ متساويين يكون القطر $ف ي$ الذي ينصف القوس $غ ي ح$ عموداً على وتر $غ ي ح$ (تعليقة ق ٢٨ ك) وعلى مماس $اب$ فهما متوازيان
 وإذا كان كلا الخطين قاطعاً مثل $غ ي ح$ ول $م$ وكان القوسان $غ ل خ م$ بينهما متساويين فلنفرض ان القطر $ف ي$ ينصف أحدهما مثل $غ ي ح$ في $ك$ فهو ينصف القوس $غ ي ح$ ايضاً اي $ي غ = ي ح$ وقد فُرض ان $غ ل = ح م$ فالكل $ي ل = ل م$ فالتوتر $ل م$ قد تنصف بالقطر $ف ي$. فقد تنصف كلا التوترين بالقطر $ف ي$ وهما اذ ذاك عمودان عليه ومتوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١)
 تعلية . لا بُدَّ ان يشترط في هذه القضية ان الخطين لا يتقاطعان في الدائرة لأنَّ خطين مستقيمين مارَّين في $غ م$ وح $ل$ يقطعان اقواساً متساوية $غ ل خ م$ ولا يكونان متوازيين

قضية و . ع

علينا ان نرسم مماساً في نقطة مفروضة من قوس دائرة بدون استعمال المركز



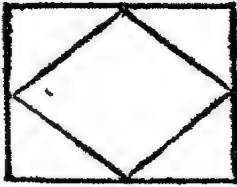
لتكن $ب$ النقطة المفروضة . قس جزءين متماثلين من القوس مثل $ب س س د$. ارسم $ب د$ وايضاً التوترين $ب س س د$ واجعل الزاوية $س ب ا$ تعدل $س ب د$ (ق ٢٢ ك ١) فيكون الخط المستقيم $ب ا$ المماس المطلوب

لأنَّ الزاوية $س ب د = س د ب$ فالزاوية $س ب ا = س د ب$ (ق ٢٢ ك ٢) التي هي في القطعة المتبادلة فإذا $ب ا$ هو مماس في النقطة $ب$

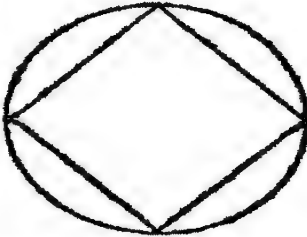
اصول الهندسة

الكتاب الرابع

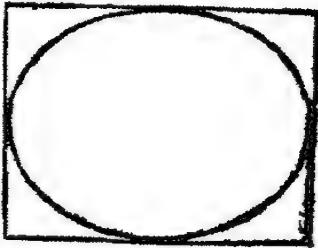
حدود



١ في شكلين اضلاعها مستقيمة متى كانت زوايا احدهما في اضلاع الآخر يقال ان الواحد مرسوم في الآخر
٢ اذا مرت اضلاع شكل في زوايا شكل آخر يقال ان الواحد محيط بالآخر

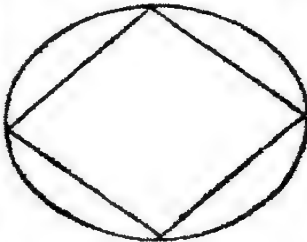


٣ متى كانت زوايا شكل ذي اضلاع مستقيمة في محيط دائرة يقال ان الشكل مرسوم في الدائرة



٤ شكل ذو اضلاع مستقيمة محيط بدائرة متى كانت اضلاعه مماسات لمحيط الدائرة

٥ اذا مس محيط دائرة كل ضلع من اضلاع شكل ذي اضلاع مستقيمة يقال انها مرسومة في الشكل
٦ الدائرة تحيط بشكل ذي اضلاع مستقيمة متى مر محيطها بزوايا الشكل



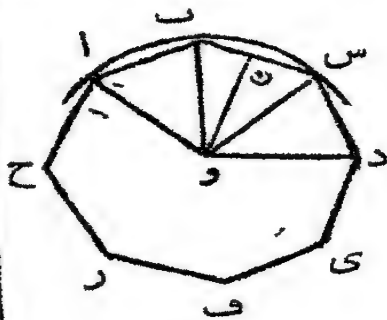
٧ اذا انتهى طرفا خط مستقيم في محيط دائرة يقال انه موضوع او مرسوم في الدائرة

٨ شكل ذو زوايا كثيرة متى كان له خمسة اضلاع يسمى ذا خمس زوايا ويسمى ذا ست زوايا متى كان له ستة اضلاع ستة وذا سبع زوايا متى كانت اضلاعه سبعة وهلم جرا
٩ شكل ذو زوايا كثيرة اذا كانت اضلاعه ورواياه متساوية يسمى قياسيا

سابقة

يمكن ان يرسم في دائرة او محيطاً بها اي شكل ذي اضلاع كثيرة
قياسي فرض

ليكن ا ب س ي ح شكلاً قياسياً ذا اضلاع كثيرة. ارسم دائرة محيطها ماراً بالقطر



الثلث ا ب س (ق ب مضافات ك ٢) ومركزها النقطة
و وليكن و ن عموداً من المركز على وسط ب س. ارسم
او د و

فاذا وُضع ذو الاضلاع الاربعة و ن س د على
ذي الاضلاع الاربعة و ن ب ا يتطابقان. لأن الضلع
و ن مشترك بين الشكلين والزاوية و ن س = و ن ب

لأنهما قائمتان. فالضلع ن س يقع على الضلع ن ب والنقطة س تقع على النقطة ب
لأن ن س = ن ب. وبما ان الشكل قياسي فالزاوية ن س د = ن ب ا فالخط س د
يقع على ب ا والنقطة د تقع على النقطة ا الآن س د = ب ا. فالشكلان يتطابقان
والخط و د = و ا والمحيط الذي يمر في القطر ا ب س يمر ايضاً في النقطة د. وعلى
هذا الاسلوب يبرهن ان المحيط المار في ب س د يمر في ي ايضاً وفي كل زوايا
الشكل المفروض فهو اذاً مرسوم في الدائرة

ثم اذا تم الشكل والدائرة كما تقدم يرى الاضلاع ا ب ب س س د الى اخره
انها اوتار متساوية وهي على بعد واحد من المركز (ق ٤ ك ٢) فاذا جعلت النقطة و
مركزاً للعمود و ن بعداً ورُسِّمَت دائرة محيطها بمس الضلع ب س في وسطه وهكذا
في جميع اضلاع الشكل فترسم الدائرة في الشكل او الشكل حول الدائرة
فرع اول. اذا فرض شكل قياسي فيمكن ان ترسم دائرة فيه واخرى محيطة به
ويكون لهما مركز واحد

فرع ثان. اذا امكن ان ترسم دائرة في شكل مفروض واخرى محيطة به فالشكل
قياسي

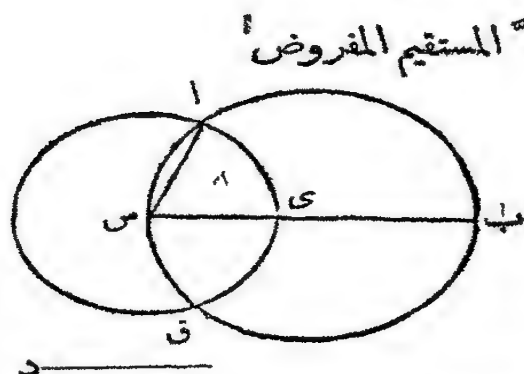
تعلقة اول. النقطة و هي مركز الدائرة اي المحطة بالمثل والمرسومة فيه فهي

ايضاً مركز الشكل. ويسمى الزاوية ا و ب الزاوية في المركز وهي مصطعة من نصفي

قطرين مرسومين من طرفي الضلع ا ب
بما ان كل الاوتار متساوية فكل الزوايا في المركز متساوية. فتستعمل كمية كل
واحدة منها بقسمة اربع زوايا قائمة على عدد اضلاع الشكل
تعليلة ثانية. اذا اردنا ان نرسم شكلاً قياسياً مفروضاً عدد اضلاعه في دائرة
مفروضة فلنقسم محيط الدائرة الى اقسام متساوية تماثل عدد اضلاع الشكل (انظر
الشكل في ق ١٥ ك ٤)

القضية الاولى ع

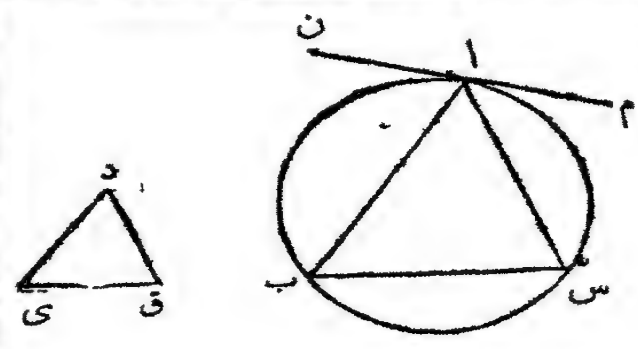
علينا ان نرسم في دائرة مفروضة خطاً مستقيماً يماثل خطاً مستقيماً مفروضاً
ليس اطول من قطر الدائرة



لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود الخط المستقيم المفروض
ارسم ب س قطر الدائرة ا ب س ثم اذا
ماثل ب س الخط د فقد تم العمل لانه قد
وضع في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل د. والآن
فالخط ب س اطول من د. اقطع الجزء
س ي حتى يماثل د (ق ٣ ك ١) واجعل س
مركزاً وس ي بعداً وارسم الدائرة ا ي ق وارسم الخط س ا. فبما ان س مركز الدائرة
ا ي ق فالخط اس يعدل س ي. ولكن س ي يعدل د فالخط س ا يعدل د ايضاً
فقد رُسم في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل الخط المستقيم المفروض د الذي ليس اطول
من قطر الدائرة

القضية الثانية ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة مثلثاً زواياه تماثل زوايا مثلث مفروض
لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود ي ق المثلث المفروض. علينا ان نرسم في



الدائرة ا ب س مثلثاً زواياه تعدل
زوايا المثلث د ق س
ارسم الخط المستقيم ن ا م
حتى يمسّ الدائرة في النقطة ا (ق
١٧ ك ٢) وفي النقطة ا من الخط
المستقيم ا م اجعل الزاوية م ا س

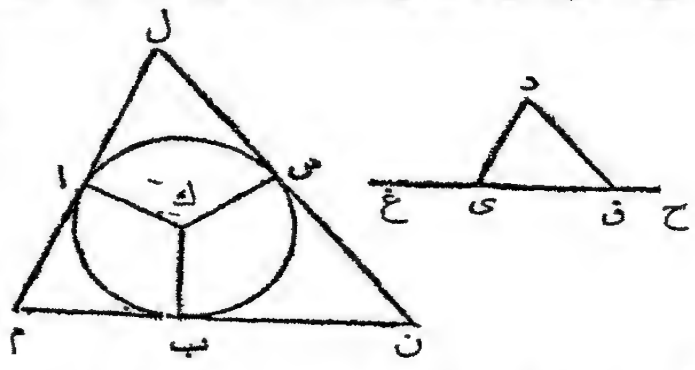
تعدل الزاوية د ق س (ق ٢٢ ك ١) وفي النقطة ا من الخط المستقيم ا ن اجعل
الزاوية ن ا ب تعدل د ق س وارسم ب س . لأنّ الخط ن ا م يمسّ الدائرة ا ب س
وا س يقطعها فالزاوية م ا س تعدل ا ب س في القطعة المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢)
وم ا س تعدل د ق س فالزاوية ا ب س تعدل د ق س ولهذا السبب ا س ب
تعدل د ق س فالزاوية الباقية من الواحد ب ا س تعدل الباقية من الاخرى د ق
(فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ق س وقد رُسم
في الدائرة ا ب س



القضية الثالثة. ع

علينا ان نرسم مثلثاً يحيط بدائرة مفروضة وزواياه تعدل زوايا مثلث
مفروض

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة وليكن د ق س المثلث المفروض. علينا ان
نرسم مثلثاً يحيط بالدائرة
ا ب س وزواياه تعدل
زوايا المثلث د ق س
أخرج د ق الى
الجهتين الى غ و ح واستعلم
ك مركز الدائرة ا ب س



(ق ١ ك ٢) ومن ك ارسم خطاً مستقيماً كيفما شئت مثل ك ب وفي النقطة ك من
الخط ب ك اجعل الزاوية ب ك ا تعدل الزاوية د ق س (ق ٢٢ ك ١) وايضاً الزاوية

ب ك س تعدل الزاوية د ق ح . وفي النقط الثلاث ا ب س ارسم المماسات ل ا م
م ب ن ن س ل (ق ١٧ ك ٣)

لان م ل م ن ن ل مماسات في النقط ا ب س التي قد رُسم اليها من المركز
ك ا ك ب ك س فالزوايا عند هذه النقط الثلاث انما هي قائمات (ق ١٨ ك ٣)
والشكل ا ك ب م ذو اربعة اضلاع وهو قابل الانقسام الى مثلثين فزواياه الاربعة
تعدل اربع زوايا قائمة . وك ا م ك ب م قائمتان فالآخران ا ك ب ب م ا تعدلان
قائمتين والزاويتان د ي غ د ي ق تعدلان قائمتين (ق ١٣ ك ١) فالزاويتان ا م ب
ا ك ب تعدلان د ي غ د ي ق . ولكن ا ك ب تعدل د ي غ فالآخرى ا م ب
تعدل الاخرى د ي ق وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان الزاوية ل ن م تعدل د ق ي
فالباقية من الواحد تعدل الباقية من الاخرى ا م ل ن تعدل د ي ق (ق ٢٢ ك ١)
فالمثلث ل م ن قد رُسم محيطاً بالدائرة ا ب س وزواياه تعدل زوايا المثلث د ي ق

القضية الرابعة . ع

علينا ان نرسم دائرة في مثلث مفروض

ليكن ا ب س المثلث المفروض . فعلينا ان نرسم فيه دائرة

نصف الزاويتين ا ب س ا س ب (ق ٩)

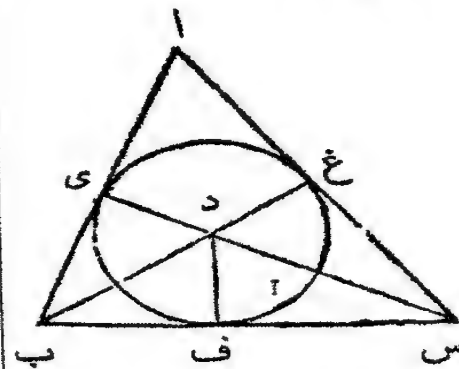
ك ١) بالخطين المستقيمين ب د س والمقاطعين

في النقطة د . ومن د ارسم الخطوط د ي د ف

د غ عمودية على الاضلاع ا ب ب س س ا

ثم لان الزاوية ي ب د تعدل ف ب د من

حيث ان ا ب س تنصفت بالخط ب د ولان



القائمة ب ي د تعدل القائمة ب ف د فالمثلث ي ب د له زاويتان تعدلان زاويتين

من المثلث ف د ب والضلع ب د الذي يقابل زاويتين متساويتين مشترك بين

المثلثين . فالضلعان الاخران من الواحد يعدلان الاخرين من الآخر (ق ٢٦ ك ١)

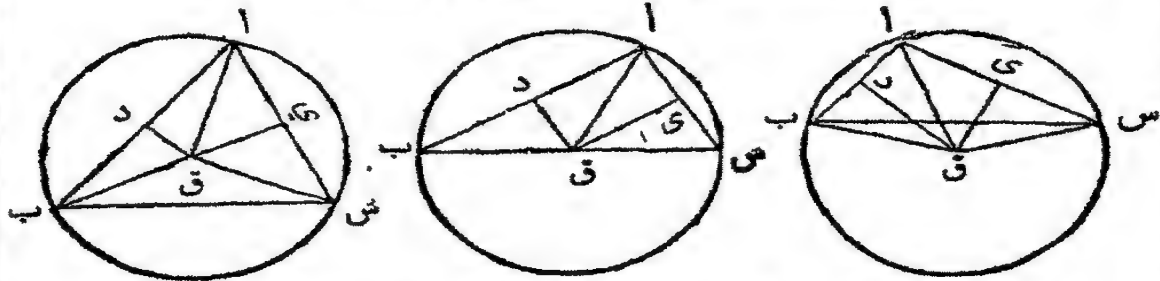
اي د ي يعدل د ف وهكذا يبرهن ايضاً ان د ع يعدل د ف والخطوط الثلاثة د غ

د ف د ي متساوية واذا رُسِمَت دائرة من المركز د وعلى بعد د ي يمر المحيط في طرفي

د ف ودغ ايضاً ويسمى الاضلاع ا ب ب س س الآن الزوايا عند هذه النقط ي
ف غ هي قائمات . والخط المستقيم العمودي على طرف القطر هو مماس (فرع اول ق
١٦ ك ٢) فالخطوط الثلاثة ا ب ب س س اسمس الدائرة فقد رُسمت الدائرة في
المثلث ا ب س

القضية الخامسة . ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمثلث مفروض
ليكن ا ب س المثلث المفروض . فعلياً ان نرسم دائرة تحيط به



نصف ا ب و ا س في د وى (ق ١٠ ك ١) ومن هاتين النقطتين ارسم د ق
ى ق عمودين على ا ب و ا س (ق ١١ ك ١) فاذا اخرج د ق ى ق يلتقيان والى
فهما متوازيان و ا ب و ا س العموديان عليهما متوازيان ايضاً وذاك محال . فلنفرض
التقاءهما في ق وارسم ق ا وان لم تكن النقطة ق في الخط ب س فارسم ب ق س ق
لان اد يعدل ب د و د ق مشترك بين المثلثين وعمود على ا ب فالقاعدة ا ق
تعديل القاعدة ب ق (ق ٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان س ق يعدل ا ق ولذلك ب ق
يعديل س ق والخطوط الثلاثة ق ا ق ب ق س متساوية واذا جعلت النقطة ق
مركزاً واحداً من هذه الخطوط بعداً فمحيط الدائرة تمر بطرفي الآخرين ونرسم حول
المثلث

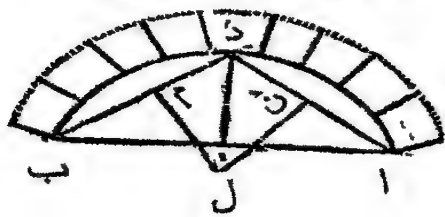
فرع . متى وقع مركز الدائرة داخل المثلث كانت كل واحدة من زواياه اصغر من
قائمة لان كل واحدة منها في قطعة اكبر من نصف دائرة . ومتى كان المركز في احد
الاضلاع فالزاوية المقابلة له قائمة لانها في نصف دائرة . ومتى وقع المركز خارج المثلث
فالزاوية المقابلة للضلع الذي كان المركز خارجه اكبر من قائمة لانها في قطعة اصغر

من نصف دائرة. فاذا كان المثلث المفروض حادّ الزوايا يقع المركز داخله وإذا كان ذا قائمة يقع المركز في الضلع الذي يقابل القائمة وإذا كان منفرج الزاوية يقع المركز خارج الضلع الذي يقابل المنفرجة

تعليقة

(١) يتضح من هذه القضية ان الخطوط الثلاثة العمودية على اواسط اضلاع مثلث تلتقي في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

(٢) بموجب هذه القضية تُرسم قطعة من قنطرة وترها وعلوها مفروضان

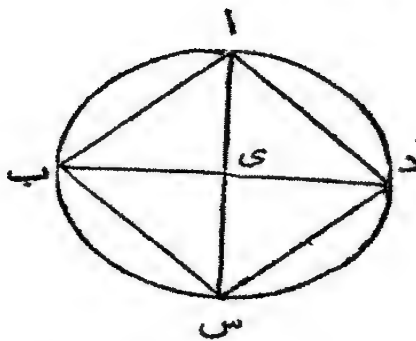


ليكن اب وترها والعمود على وسطها علوها. ارسم ا د ب د ونصّفها في م ون ومن م ون ارسم عمودين ل م ل ن الملتقيين في ل مركز الدائرة. فالخطوط ل ب ل د ل ا متساوية والحلول بين حجارة القنطرة هي كأنها منقطعة من انصاف اقطار الدائرة

القضية السادسة. ع

علينا ان نرسم مربعاً في دائرة مفروضة

لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة. فعلياً ان نرسم فيها مربعاً



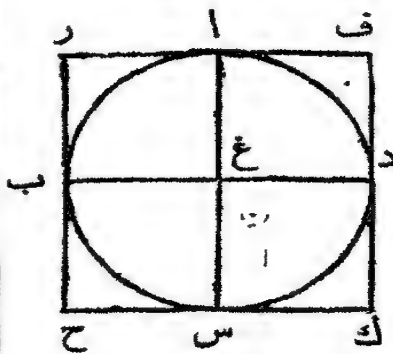
ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد منهما عموداً على الآخر. وارسم اب ب س س د دا النقطة ع هي مركز الدائرة ولذلك ب ع يعدل ع د وقد جعل ا ع عموداً على ب د والمثلثان ا ب ع ا د ع لهما الضلع المشترك ا ع فالقاعدة ا ب تعدل القاعدة ا د (ق ٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان

ب س س د بعدلان ا ب ا و ا د فالشكل ا ب س د متساوي الاضلاع. وهي ايضاً قائم الزوايا. لانّ ب د قطر و ب ا د نصف دائرة فالزاوية ب ا د قائمة (ق ٣١ ك ٢) هكذا يبرهن ايضاً ان ا ب س ب س د س د ا قائمات فالشكل ا ب س د قائم الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو مربع وقد رُسم في الدائرة ا ب س د

تعليقة. المثلث اى د قائم الزاوية ومتساوي الساقين فلنا (فرع ٢ ق ٤٧ ك ١)
 ا د اى ١ : ٢٦ : ١ اى ضلع مربع في دائرة الى نصف القطر كجذر اثنين المائل الى واحد

القضية السابعة. ع

علينا ان نرسم مربعاً محيطاً بدائرة مفروضة
 ليكن ا ب س د الدائرة المفروضة. فعلينا ان نرسم مربعاً محيطاً بها

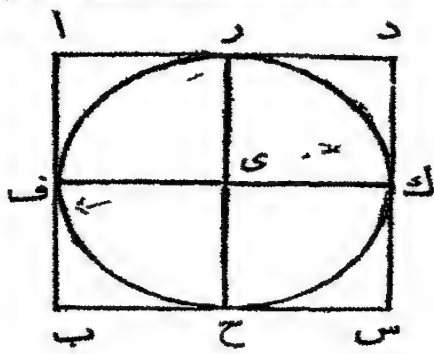


ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد
 منها عموداً على الآخر. وفي النقط ا ب س د
 ارسم المماسات ر ف ح ك ف (ق ١٧ ك ٣)
 لأن ر ف ممس الدائرة وقد رسم غ ا من المركز
 الى نقطة الماسة فالزاويتان عند ا قائمتان (ق ١٨
 ك ٣) وهكذا يبرهن ان الزوايا عند ب وس ود

قائمات. فبما ان ا غ ب قائمة و غ ب ر كذلك فالخط ر ح يوازي ا س وهكذا يبرهن
 ان ا س يوازي ف ك وان ر ف و ح ك يوازيان ب د فالاشكال ر ك س ا ك
 ف ب ب ك هي متوازية الاضلاع و ر ف يعدل ح ك (ق ٢٤ ك ١) و ر ح يعدل
 ف ك. ومن حيث ان ا س يعدل ب د و يعدل ر ح و ف ك ايضاً و ب د يعدل
 ر ف و ح ك فالخطان ر ح ف ك يعدلان ر ف ا و ح ك فالشكل ف ر ح ك متساوي
 الاضلاع. وهو ايضاً قائم الزوايا. لأن ر ب غ ا متوازي الاضلاع و ا غ ب قائمة
 تكون ا ر ب ايضاً قائمة (ق ٢٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان كل واحدة من الزوايا عند
 ح و ك ف قائمة فالشكل ف ر ح ك قائم الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع
 فهو مربع وقد رسم محيطاً بالدائرة ا ب س د

القضية الثامنة. ع

علينا ان نرسم دائرة في مربع مفروض
 ليكن ا ب س د المربع المفروض. فعلينا ان نرسم فيه دائرة



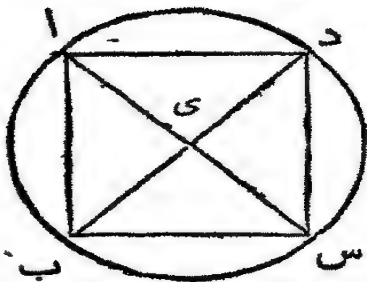
نصف الضلع اب في ف والضلع اد في ر
(ق ١٠ ك ١) ومن ارسم رح حتى يوازي اب او
دس ومن ف ارسم ف ك حتى يوازي دا وب س
فكل واحد من الاشكال اك ك ب اح ح د اى
ى س ب ي ى د متوازي الاضلاع واضلاعها
المتقابلة متساوية (ق ٣٤ ك ١) فمن حيث ان اد

يعدل اب وار نصف اد و ف نصف اب فبالضرورة ار يعدل اف فالضلعان
المقابلان لهذين متساويان ايضا اي ف ي يعدل ى ر وهكذا يبرهن ان ى ح وى ك
يعدلان ف ى اوى ر فالخطوط الاربعة ى ر ى ف ى ح ى ك متساوية والدائرة
المرسومة على المركز ى وعلى بعد احد هذه الخطوط تثر باطراف الآخر. وهي تمس
الاضلاع الاربعة ايضا لان الزوايا عند ر ف ح ك قائمات (ق ٢٩ ك ١) والخط
العمودي على طرف القطر انما هو مماس (ق ١٦ ك ٣) فكل واحد من الخطوط
الاربعة اب ب س س د د ا مماس الدائرة فقد رُسِمَت الدائرة في المربع المفروض

القضية التاسعة ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمربع مفروض

ليكن اب س د المربع المفروض فعلينا ان نرسم دائرة تحيط به



ارسم اس ب د المتقاطعين في ى. فلان دا
يعدل اب والخط اس مشترك بين المثلثين دا س
ب اس فالضلعان دا اس يعدلان ب اس
والقاعدة دس تعدل القاعدة ب س فالزاوية دا س
تعدل ب اس (ق ٨ ك ١) فقد تنصفت الزاوية دا ب

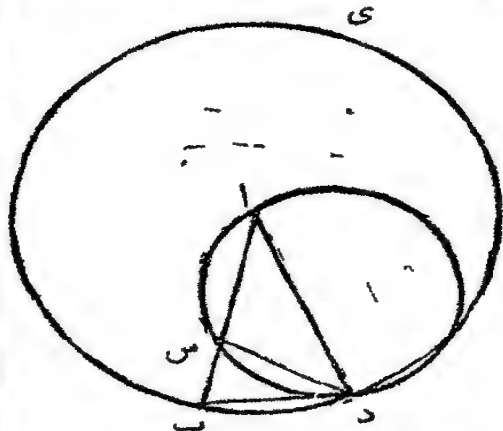
بالخط اس وهكذا يبرهن ان الزوايا اب س ب س د ا قد تنصفت
بالخطين المستقيمين اس ب د. فلكون الزاوية دا ب تعدل اب س
وى اب نصف دا ب وى ب ا نصف اب س فالزاوية ى اب تعدل ى ب ا
والضلع اى يعدل الضلع ب ى (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ى س ى د يعدلان

اى اوبى فالخطوط الاربعه اى اى بى سى د متساوية والدائرة المرسومة على المركزى وعلى بعد احد هذه الخطوط تمر باطراف الآخر وتحيط بالمرتع ا ب س د

القضية العاشرة ع

علينا ان نرسم مثلثا متساوي الساقين وكل واحدة من الزاويتين عند القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

افرض خطا مستقيما مثل ا ب واقسمه (ق ١١ ك ٢) في س الى قسمين حتى ان القائم الزوايا ا ب \times ب س يعدل مربع ا س واجعل ا مركزا و ا ب بعدا وارسم الدائرة ب دى واجعل فيها (ق ١ ك ٤) الخط المستقيم ب د حتى يعدل ا س الذي ليس اطول من قطر الدائرة ب دى ارسم د ا د س وارسم الدائرة ا س د تحيط بالمثلث ا د س (ق ٥ ك ٤) فالمثلث ا ب د هو المطلوب اى كل واحدة من الزاويتين ا ب د ا د ب مضاعف الزاوية ب ا د



لأن القائم الزوايا ا ب \times ب س يعدل مربع ا س و ا س يعدل ب د فالقائم الزوايا

ا ب \times ب س يعدل مربع ب د ولانه قد رسم الخط المستقيم ب س والخط المستقيم ب د من النقطة ب خارج الدائرة ا س د الواحد قاطع الدائرة والاخر يلاقيها والقائم الزوايا ا ب \times ب س مسطح كل القاطع في الجزء منه الواقع خارج الدائرة يعدل مربع ب د الذي يلاقي الدائرة ا س د فالخط ب د مماس للدائرة ا س د (ق ٢٧ ك ٢) ولان ب د مماس و د س قاطع من نقطة المماسه فالزاوية ب د س (ق ٢٢ ك ٢) تعدل الزاوية د ا س في القطعة المتبادلة من الدائرة اصف الى كل واحدة منهما الزاوية س د ا فكل الزاوية ب د ا تعدل الزاويتين س د ا د ا س ولكن الزاوية الخارجة ب س د (ق ٢٢ ك ١) تعدل الزاويتين س د ا د ا س فالزاوية ب د ا تعدل ب س د ولكن ب د ا تعدل س ب د لان الساق ا د يعدل الساق ا ب (ق ٥ ك ١) فالزاوية س ب د ا و د ب ا تعدل ب س د فالزوايا الثلاث

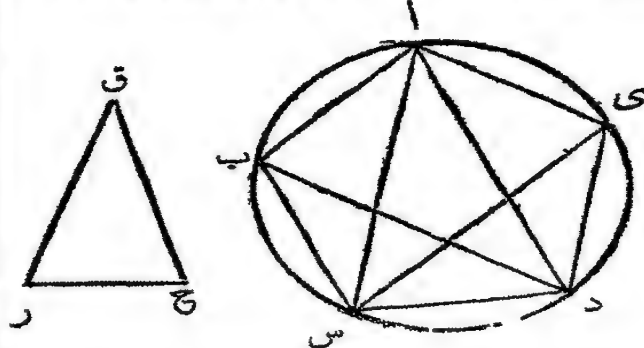
ب د ا د ب ا ب س د متساوية. ولأن الزاوية د ب س تعدل ب س د فالضلع
ب د يعدل الضلع س د (ق ٦ ك ١) وب د يعدل ا س ولذلك س د يعدل ا س
ايضاً والزاوية س د ا تعدل س ا د (ق ٥ ك ١) وس د ا س ا د معاً مضاعف
س ا د. ولكن ب س د تعدل س د ا س ا د (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ب س د
مضاعف س ا د. وب س د تعدل كل واحدة من الزاويتين ب د ا د ب ا فكل
واحدة من هاتين مضاعف الزاوية ب ا د فقد رُسم مثلث متساوي الساقين وكل
واحدة من الزاويتين عند القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

فرع أول. الزاوية ب ا د هي خمس قائمتين. لأن كل واحدة من ا ب د ا د ب
مضاعف ب ا د فهما معاً تعدلان اربعة امثال ب ا د والثلاث زوايا معاً تعدل
خمس امثال ب ا د والثلاث معاً تعدل قائمتين اي خمسة امثال ب ا د تعدل
قائمتين ا ب ا د تعدل خمس قائمتين

فرع ثان. لان ب ا د خمس قائمتين او عشر اربع قائمات فكل الزوايا في المركز
ا تعدل معاً عشرة امثال ب ا د ونقيل الانقسام الى عشرة اقسام كل واحد يعدل
ب ا د وهذه الزوايا العشر في المركز نقابلها عشرة اقواس متساوية فالقوس ب د هـ
عشر المحيط والمخط المستقيم ب د ا و ا س يعدل ضلعاً من ذي عشرة اضلاع مرسوم
في الدائرة ب د ي

القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً اذا خمسة اضلاع في دائرة مفروضة
لتكن ا ب س د ي الدائرة المفروضة. فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً اذا



خمس اضلاع. ارسم مثلثاً متساوي
الساقين ق ر ح لهُ كل واحدة من
الزاويتين عند القاعدة ا ب د ر
وح مضاعف الزاوية عند ق (ق ١٠
ك ٤) وفي الدائرة ا ب س د ي ارسم
المثلث المتساوي الساقين ا س د

زوايا تماثل زوايا المثلث ق ر ح (ق ٢ ك ٤) اي الزاوية س ا د تماثل الزاوية عند ق
والزاوية ا س د تماثل الزاوية عند ر و ا د س تماثل الزاوية عند ح . فكل واحدة من
الزاويتين ا س د ا د س هي مضاعف س ا د نصفها بالخطين المستقيمين س ي د ب
(ق ٩ ك ١) وارسم ا ب ب س ا ي د فالشكل ا ب س د ي هو الشكل
المطلوب ذو خمسة اضلاع قياسي

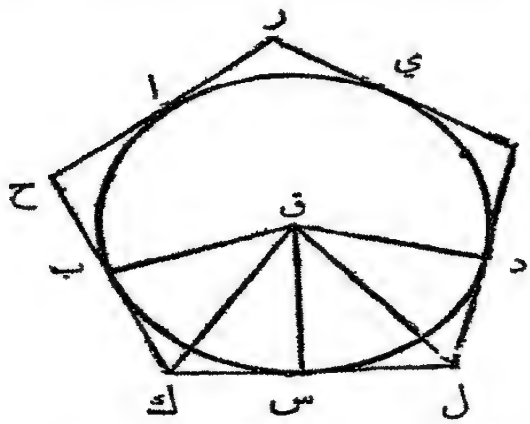
بما ان كل واحدة من الزاويتين ا س د ا د س مضاعف س ا د وقد تنصفتنا
بالخطين المستقيمين د ب س ي فالزوايا الخمس د ا س ا س ي س د س د ب
ب د ا متساوية . والزوايا المتساوية نقابلها اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٣) فلاقواس
الخمس ا ب ب س س د د ي ا متساوية . والاقواس المتساوية نقابلها خطوط
متساوية (ق ٢٩ ك ٣) فالخطوط ا ب ب س س د د ي ا متساوية والشكل
ا ب س د ي ذو خمسة اضلاع متساوية . وهو ايضاً متساوي الزوايا لان القوس ا ب
يعدل القوس د ي . فاذا اُضيف اليها ب س د فلكل ا ب س د يعدل الكل
ي د س ب . والزاوية ا ي د واقفة على القوس ا ب س د والزاوية ب ا ي على
القوس س ي د س ب . فالزاوية ب ا ي تعدل الزاوية ا ي د (ق ٢٧ ك ٣) وهكذا
يبرهن ان الزوايا ا ب س ب س د س د ي تعدل ب ا ي ا و ا ي د فالشكل
ا ب س د ي متساوي الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة اضلاع
قياسي وقد رُسم في الدائرة المفروضة

طريقة اخرى . اقسم نصف قطر الدائرة المفروضة حتى ان القائم الزوايا مسطح
كل الخط في احد القسمين يعدل مربع القسم الاخر (ق ١١ ك ٢) وارسم خطاً
يعدل اكبر القسمين على جانبي نقطة مفروضة في الدائرة المفروضة فكل واحد منها
يقطع قوساً عُشر المحيط (فرع ٢ ق ١٠ ك ٤) فالقوسان معاً خمس المحيط ووتره ضلع
شكل ذي خمسة اضلاع قياسي في الدائرة

القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع محيطاً بدائرة مفروضة
لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة . علينا نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع

يحيط بها



لتكن زوايا شكل قياسي ذي خمسة
اضلاع في الدائرة في النقط ا ب س د ي
فالقواس ا ب ب س س د د ي متساوية
(ق ١١ ك ٤) وفي النقط ا ب س د ي
ارسم المخطوط رح ح ك ل م م ر
حتى تمس الدائرة (ق ١٧ ك ٢) استعلم المركز
ق وارسم ق ب ق ك ق س ق ل ق د

فما ان الخط المستقيم ك ل يمس الدائرة ا ب س د ي في النقطة س التي
رسم اليها ق س من المركز فالخط ق س عمود على ك ل (ق ١٨ ك ٢) والزوايتان
عند س قائمتان. وهكذا يبرهن ايضا ان الزوايا عند ب ود قائمتان. ولكون
ق س ك قائمة فمربع ق ك يعدل مجموع مربعي ق س س ك (ق ٤٧ ك ١)
ولكون ق ب ك قائمة فمربع ق ك يعدل مربعي ق ب ب ك فمربع ق س س ك
يعدلان مربعي ق ب ب ك. ومربع ق س يعدل مربع ق ب فالباقي مربع س ك
يعدل الباقي مربع ب ك والخط س ك يعدل الخط ب ك. وبما ان ق س
يعدل ق ب وق ك مشترك بين المثلثين ق س ك ق ب ك فالضلعان ب ق
ق ك يعدلان الضلعين س ق ق ك والقاعدتان س ك تعدل القاعدة ب ك. فالزاوية
ب ق ك تعدل الزاوية س ق ك (ق ٨ ك ١) وب ك ق تعدل س ك ق. فمكمل
الزاوية ب ق س هي مضاعف ك ق س وب ك س مضاعف ق ك س. وهكذا
يبرهن ان الزاوية س ق د مضاعف س ق ل وس ل د مضاعف س ل ق.
ولكون القوس ب س يعدل القوس س د فالزاوية ب ق س تعدل س ق د
(ق ٢٧ ك ٢) وب ق س مضاعف ك ق س وس ق د مضاعف س ق ل فالزاوية
ك ق س تعدل س ق ل. والقائمة ق س ك تعدل القائمة ق س ل فالمثلثان
ق ك س ق ل لهما زاويتان من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلع
ق س مشترك بينهما فالمثلثان متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك س يعدل الضلع
س ل والزاوية ق ك س تعدل ق ل س. ولكون ك س يعدل س ل فالخط
ك ل مضاعف ك س. وهكذا يبرهن ان ح ك مضاعف ب ك. ولكن ب ك

يعدل ك س كما قد تهرن سابقاً فالخط ك ل يعدل ح ك (أوليفة ٦) وهكذا يهرن
ان رح رم ل تعدل ح ك او ك ل . فالشكل رح ك ل م ذو خمسة اضلاع
متساوية وزواياه متساوية ايضاً لان الزاوية ق ك س تعدل ق ل س وح ك س
مضاعف ق ك س وك ل م مضاعف ق ل س كما تقدم برهانه فالزاوية ح ك ل
تعدل ك ل م . وهكذا يهرن ان ل م ر م رح ك تعدل ح ك ل او ك ل م .
فالزوايا الخمس متساوية وقد تهرن ان الشكل متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة
اضلاع قياسي محيط بالدائرة المفروضة

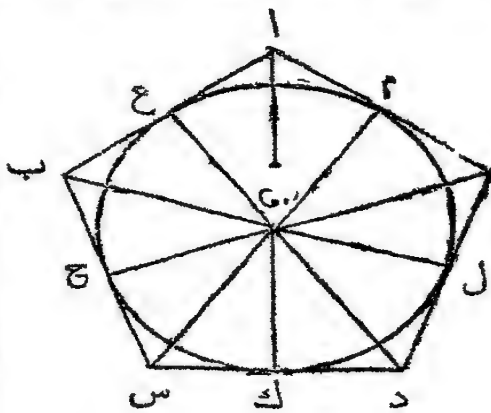
القضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع

ليكن ا ب س د س دى الشكل المفروض . علينا ان نرسم فيه دائرة

نصف الزاويتين ب س د س دى بالخطين المستقيمين س ق د ق . ومن

ق نقطة التقاءهما ارسم الخطوط المستقيمة ق ب ق ا ق ي . فلكون ب س يعدل



س د وق س . مشترك بين المثلثين

ب س ق د س ق فالضلعان ب س

س ق يعدلان الضلعين د س س ق

والزاوية ب س ق تعدل الزاوية د س ق .

فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة ق د (ق ٤

ك ا) وثيقة الزوايا من الواحد تعدل بقية

الزوايا من الآخر فالزاوية س ب ق تعدل

س د ق . ولان س دى مضاعف س د ق وس دى تعدل س ب ا وس د ق تعدل

س ب ق فالزاوية س ب ا مضاعف س ب ق فالزاوية ا ب ق تعدل س ب ق

فالزاوية ا ب س قد تصفت بالخط المستقيم ب ق . وهكذا يهرن ان ب اى د

نصفنا بالخطين المستقيمين ا ق ي ق

ثم من النقطة ق (ق ١٢ ك) ارسم ق غ ق ح ق ك ق ل ق م عمودية

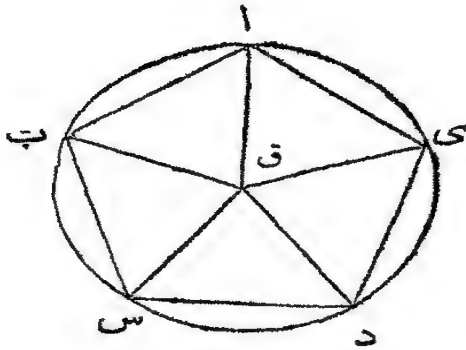
على الخطوط المستقيمة ا ب ب س س د دى ا . فن حيث ان الزاوية

ح س ق تعدل ك س ق والقائمة ق ح س تعدل القائمة ق ك س والضلع ق س

مشارك بين المثلثين فالضلع الثالث ق ح يعدل الثالث ق ك (ق ٢٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ل ق م ق غ تعدل ق ح اوق ك فالخطوط الخمسة المذكورة متساوية. فالدائرة المرسومة على المركز ق وعلى بعد احد هذه الخطوط تمر باطراف الآخر وتمس الخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ي ي ا. ومن حيث ان الزوايا عند النقط غ ح ك ل م قائمات فالخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ي ي ا هي عمودية على اطراف ا ب صاف الاقطار فهي مماسات (فرع ١ ق ١٦ ك ٢) فقد رُسِمَت الدائرة في الشكل المفروض

القضية الرابعة عشرة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بشكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع. ليكن ا ب س د ي شكلاً مفروضاً قياسياً ذا خمسة اضلاع. فعلياً ان نرسم دائرة تحيط به



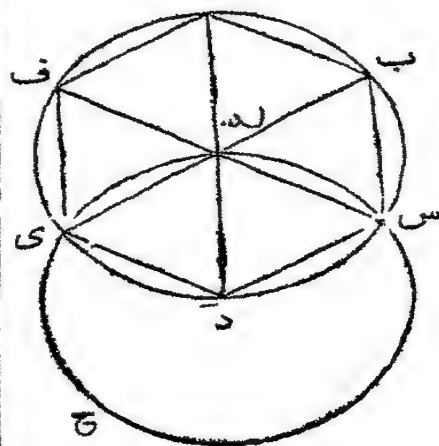
نصف الزاوية ب س د بالخط المستقيم س ق والزاوية س د ي بالخط المستقيم د ق (ق ٩ ك ١) ومن ق نقطة التقاءها ارسم الخطوط المستقيمة ق ب ق ا ق ي الى القطب و ا و ي. فيبرهن كما في القضية السابقة ان الزوايا س ب ا ب ا ي ا ي د قد تنصفت بالخطوط المستقيمة

ق ب ق ا ق ي. ومن حيث ان الزاوية ب س د تعدل س د ي والزاوية ق س د انما هي نصف ب س د وس د ق نصف س د ي فالزاوية ق س د تعدل س د ق فالضلع ق س يعدل الضلع ق د (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ب ق ا ق ي تعدل ق س اوق د فهذه الخطوط الخمسة المستقيمة متساوية واذا جعلت النقطة ق مركزاً واحد هذه الخطوط بعداً ورُسِمَت دائرة فمحيطها يمر باطراف الآخر وهي تحيط بالشكل القياسي ذي الخمسة الاضلاع ا ب س د ي

القضية الخامسة عشرة. ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً اذا سته اضلاع في دائرة مفروضة
لتكن ا ب س د ه ف الدائرة المفروضة ، فعليها ان نرسم فيها شكلاً قياسياً اذا
سته اضلاع

استعلم المركزغ وارسم القطراغ د واجعل د مركزا ودغ بعدا وارسم الدائرة
ي غ س ح . ارسم الخط ي غ والخط غ س وأخرجها الى ب وف . ثم ارسم الخطوط
المستقيمة ا ب ب س س د د ي ي ف ف ا .



فالشكل ذو الستة الاضلاع ا ب س د ي ف هو
قياسي اي اضلاعه وزواياه متساوية

من حيث ان النقطة غ هي مركز الدائرة
ا ب س د ف فالخط غ ي يعدل الخط غ د . ولان
د مركز الدائرة غ س ح ي فالخط د ي يعدل د غ .
فالخط غ ي يعدل ي د والمثلث ي غ د هو
مساوي الاضلاع وزواياه الثلاث متساوية (فرع

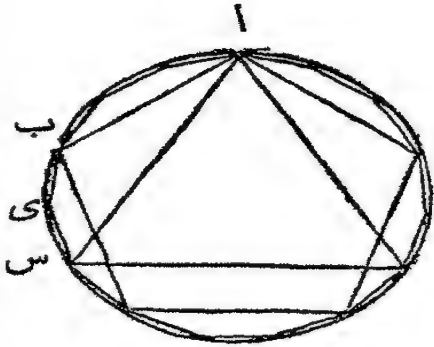
ق ٥ ك ١) وزوايا كل مثلث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية γ د هي ثلث قائمتين. وهكذا يبرهن ان الزاوية δ س ثلث قائمتين. ومن حيث ان الخط المستقيم γ س احدث مع γ ب الزاويتين المتواليتين γ س س γ ب حتى تعدلا قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاوية δ س γ ب تعدل ثلث قائمتين. فالزوايا الثلاث γ د د γ س س γ ب متساوية. والزوايا المتقابلة γ ا γ ب γ د γ س (ق ١٥ ك ١) متساوية ايضا. فالزوايا الست γ د د γ س س γ ب γ ا γ ب γ د متساوية. والزوايا المتساوية في المركز تقابلها اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٢) والاقواس المتساوية تقابلها خطوط مستقيمة متساوية (ق ٢٩ ك ٢) فالخطوط الستة γ ا γ ب γ س س د د γ ا γ ب متساوية. والشكل ذو الاضلاع الستة γ ا γ ب س د د γ ا γ ب متساوي الاضلاع. وهو متساوي الزوايا ايضا. لان القوس γ ا γ ب يعدل القوس γ د فاذا اُضيف الى كل واحد منها القوس γ ب س د فكل γ ا γ ب س د يعدل الكل γ د س ب ا. والزاوية γ د هي على القوس γ ا γ ب س د.

بالزاوية ا ف ي هي على القوس ي د س ب ا فالزاوية ا ف ي تعدل الزاوية ف ي د
وهكذا يبرهن في بقية زوايا الشكل انها تعدل ا ف ي او ف ي د فالشكل ا ب س
د ي ف متساوي الزوايا. وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو قياسي وقد رُسم في
الدائرة المفروضة ا ب س د ي ف

فرع. ضلع شكل ذي ستة اضلاع قياسي في دائرة يعدل نصف قطر الدائرة.
واذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في النقط ا ب س د ي ف يحدث شكل
قياسي ذو ستة اضلاع محيط بالدائرة وعلى هذا الاسلوب تُرسم دائرة في شكل قياسي
مفروض ذي ستة اضلاع او محيطه بـ حسبما تقدم في ذي خمسة اضلاع

القضية السادسة عشرة ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة عشر ضلعاً في دائرة مفروضة
لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة. فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا خمسة
عشر ضلعاً



ليكن ا س ضلع مثلث متساوي الاضلاع
في الدائرة (ق ٢ ك ٤) و ا ب ضلع شكل قياسي
ذي خمسة اضلاع في الدائرة (ق ١١ ك ٤).
فالقوس ا ب س هو ثلث المحيط او $\frac{1}{3}$ من
المحيط والقوس ا ب هو خمس المحيط اي $\frac{2}{5}$
من المحيط فالقوس ب س فصلتها وهو $\frac{1}{5}$

من المحيط. نصّف ب س في ي (ق ٢٠ ك ٢) فكل واحد من ب ي ي س هو
 $\frac{1}{10}$ من المحيط فاذا رُسم الخطان المستقيمان ب ي ي س ووضع امثالهما في دائرة
المحيط (ق ١ ك ٤) يحدث شكل قياسي ذو خمسة عشر ضلعاً في الدائرة

اذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في زوايا الشكل المذكور يحدث شكل قياسي
ذو خمسة عشر ضلعاً محيط بالدائرة. وعلى هذا الاسلوب ايضاً حسبما تقدم في شكل ذي
خمسة اضلاع تُرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة عشر ضلعاً او محيطه بـ

تعليقة

إذا رُسم في دائرة شكل قياسي ذو اضلاع كثيرة وتنصفت الاقواس التي تقابل
 اضلاعه فيحدث شكل قياسي عدد اضلاعه مضاعف عدد اضلاع الاول. وهكذا
 من المربع في دائرة تحدث اشكال ذات ثمانية اضلاع او ستة عشر ضلعاً او ٢٢
 ضلعاً او ٦٤ ضلعاً الى اخره. ومن ذي ستة اضلاع في دائرة يحدث شكل ذو ١٢
 او ٢٤ او ٤٨ او ٩٦ ضلعاً الى اخره. ومن ذي عشرة اضلاع يحدث
 شكل ذو ٢٠ او ٤٠ او ٨٠ ضلعاً الى اخره. ومن
 ذي خمسة عشر ضلعاً يحدث شكل ذو ٣٠
 او ٦٠ ضلعاً الى اخره. ولكن الى
 الآن لم توجد طريقة لرسم
 شكل قياسي ذي
 سبعة اضلاع
 في دائرة

اصول الهندسة

الكتاب الخامس

حدود

١ المقدار هو ما كان له واحد أو أكثر من ثلاثة اشياء وهي طول وعرض وعمق فاذا قُرض مقداران أكبر وأصغر وكان الأصغر قياساً تاماً للأكبر اي وُجد فيه مراراً معلومة بدون باقي فالأصغر جزء الأكبر

٢ اذا كان أصغر مقدارين قياساً تاماً لأكبرهما فالأكبر مضروب الأصغر

٣ التناسب هو التفاوت بين مقدارين من جنس واحد باعتبار الكمية

٤ المقادير هي من جنس واحد متى امكن زيادة الأصغر حتى يزيد عن الأكبر

والتناسب لا يقع الا بين المقادير المتجانسة

٥ اذا قُرض اربعة مقادير وضرب الاول والثالث مراراً ما وضرب الثاني

والرابع مراراً ما فاذا عدل الثالث الرابع عندما عدل الاول الثاني او كان أكبر

منه عندما كان الاول أكبر من الثاني او أصغر منه عندما كانت الاول أصغر من

الثاني فيقال ان نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع

٦ المقادير المتناسبة هي التي كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث

الى الرابع وتناسب الثالث الى الرابع مثل تناسب الخامس الى السادس وهلم جرا

مهما تعددت المقادير. فاذا كانت المقادير الاربعة ا ب س د متناسبة يقال ان

نسبة ا الى ب كسبة س الى د وتكتب هكذا: $a:b::s:d$ او $a:b=s:d$

س: د

٧ اذا قُرض اربعة مقادير كما في الحد الخامس وقاس الاول الثاني مراراً

أكثر مما يقيس الثالث الرابع يقال ان تناسب الاول الى الثاني هو اعظم من تناسب

الثالث الى الرابع وان تناسب الثالث الى الرابع هو اصغر من تناسب الاول الى الثاني
 ٨ متى تعددت المقادير وكان تناسب الاول الى الثاني يماثل تناسب الثاني
 الى الثالث وتناسب الثاني الى الثالث يماثل تناسب الثالث الى الرابع وهلم جرا
 يقال انها على نسبة متصلة

٩ متى كان ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان الثاني متناسب متوسط
 بين الآخرين

١٠ اذا تعددت المقادير المخالفة كما في الحد الثامن يقال ان تناسب الاول
 الى الاخير هو مركب من تناسب الاول الى الثاني مع تناسب الثاني الى الثالث مع
 تناسب الثالث الى الرابع وهلم جرا الى الاخير

فلو فرض اربعة مقادير ا ب س د يقال ان تناسب ا الى د هو
 مركب من تناسب ا الى ب مع تناسب ب الى س مع تناسب س الى د ولذا فرض
 ا:ب::ب:س::س:د::د:ا فتناسب ا الى د هو
 مركب من تناسب ا الى ب مع ب الى س مع س الى د او من تناسبات تعدل
 المذكورة كتناسب ا الى ب وب الى س وس الى د و د الى ا

وهكذا اذا فرض بين م ون التناسب الواقع بين ا ود، فلاجل الاختصار
 يقال ان التناسب بين م ون هو مركب من التناسبات التي تركب منها التناسب
 بين ا ود اي من تناسب ا الى ب وب الى س وس الى د و د الى ا

١١ متى كانت ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى
 الثالث هو مضاعف تناسب الاول الى الثاني، فاذا فرض ا:ب::ب:س
 فتناسب ا الى س هو مضاعف تناسب ا الى ب، وحسب الحد السابق تناسب ا الى
 س هو مركب من تناسب ا الى ب وب الى س فالتناسب المركب من تناسبتين
 متماثلتين هو مضاعف كل منهما

١٢ متى كان اربعة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى
 الرابع هو ثلاثة امثال تناسب الاول الى الثاني او الثالث الى الرابع واذا كان
 خمسة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى الخامس هو اربعة امثال
 تناسب الاول الى الثاني او الثاني الى الثالث وهلم جرا الى النهاية، فالتناسب
 المركب من ثلاث تناسبات متماثلة هو ثلاثة امثال كل منها والمركب من اربع تناسبات

هو اربعة امثال كلٍ منها وهم جراً

١٣ في اربع متناسبات تسمى الاولى والثالثة السابقتين والثانية والرابعة التاليتين. والسابق مع تالييهما المتناسبان والسابقان معاً او التاليان معاًهما المتشابهان
١٤ التبادل في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الاول الى الثالث كالثاني الى الرابع (ق ١٦ ك ٥)

١٥ القلب في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الثاني الى الاول كالرابع الى الثالث (قضية الف ك ٥)

١٦ التركيب هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول مع الثاني الى الثاني كالثالث مع الرابع الى الرابع (ق ١٨ ك ٥)

١٧ القسمة هي متى كان اربعة مقادير متناسبة وكانت زيادة الاول عن الثاني الى الثاني كزيادة الثالث عن الرابع الى الرابع (ق ١٧ ك ٥)

١٨ الطرح هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول الى زيادته عن الثاني كالثالث الى زيادته عن الرابع (ق د ك ٥)

اوليات

- ١ اذا ضرب مقادير متساوية في كميات متساوية تبقى متساوية
- ٢ المقادير التي تقيس مقادير متساوية مراراً متساوية هي متساوية
- ٣ مضروب لمقدار اعظم هو اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار اصغر
- ٤ اذا كان مضروب لمقدار اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار آخر فالمدار الاول اعظم من الثاني

القضية الاولى. ن

اذا فرضت عدة مقادير قابلة الانقسام على عدة اخرى من المقادير مراراً معلومة كل واحد على نظيره في سبها يتعدد كل من المتسومات

عليها في مقسومه هكذا يتعدد مجتمع المقسومات عليها في مجتمع المقاسم
(انظر كتاب علم الجبر ع^{١٦٦})

لنفرض المقادير ا و ب وس قابلة الانقسام مراراً معلومة على المقادير د و ي وف
كل واحد على نظيره فالججمع د + ي + ف يتعدد في الججمع ا + ب + س كما يتعدد
د في ا

لنفرض ان د يتعدد في ا ثلاث مرات وهكذا ي في ب وف في س

فلكون ا بعدد د ثلاث مرات لنا

$$1 = د + د + د$$

$$ب = ي + ي + ي$$

وايضاً

$$س = ف + ف + ف$$

وايضاً

وبإضافة اشيء متساوية الى اشيء متساوية (اولية ٢ ك ١) ا + ب + س يعدل
د + ي + ف ثلاث مرات وهكذا لو تعددت د و ي وف في ا و ب وس أكثر او
اقل من ثلاث مرات

فرع. اذا فرضنا م عدداً ما كان م د + م ي + م ف = م (د + ي + ف) لان
م د م ي م ف هي تعداد د ي ف مراراً تماثل م فجمعها يتعدد ايضاً مراراً تماثل م

القضية الثانية. ن

اذا ضرب مقدار في عدد ما و اضيف الى الحاصل المقدار ذاته مضروباً
في عدد آخر فالججمع يعد ذلك المقدار مراراً تماثل الاحاد في مجتمع
المضروبين فيها. (انظر كتاب الجبر ع^{١٨٧})

لنفرض ا = م س و ب = ن س فحينئذ ا + ب = (م + ن) س

لان ا = م س لنا ا = س + س + س الخ م مرة وايضاً ب = س + س + س

س الخ ن مرة. فبإضافة اشيء متساوية الى اشيء متساوية ا + ب = س متعددة م +

ن مرة اي ا + ب = (م + ن) س اي ا + ب يعد س مراراً تماثل الاحاد في م + ن

فرع أول. هكذا مهما تعددت المضارب فلو فرض ا = م ي و ب = ن ي

وس = ف ي لنا ا + ب = س (م + ن) ف

فرع ثانٍ. وهكذا من حيث ان $ا + ب + س = (م + ن + ف) ي$ وقد فرض
 $ا = م ي$ وب $ن ي$ وس $= ف ي$ لنا $م ي + ن ي + ف ي = (م + ن + ف) ي$

القضية الثالثة. ن

اذا فرض ثلاثة مقادير ونعدّ الثاني في الاول مرارًا تماثل الاحاد في
 عددٍ ما وتعدد الثالث في الثاني مرارًا تماثل الاحاد في عددٍ ما
 فالثالث يتعدد في الاول مرارًا تماثل الاحاد في حاصل هذين
 العددين. (انظر كتاب الجبر ع^{١٨٢})

لفرض $ا = م ب$ وب $ن = س$ فحينئذٍ $ا = م ن س$
 لانه حسب المفروض $ب = ن س$ فلذلك $م ب = ن س + ن س + ن س + الخ م مرّة$
 ون $س + ن س + الخ م مرّة$ يعدل $س$ في $ن + ن + ن + الخ م مرّة$ (فرع ثانٍ ق ٢ ك ه)
 ون مضافة الى ذاتها $م مرّة$ يعدل $ن$ في $م$ اي $م ن$ فاذا $ن س + ن س + ن س + الخ م مرّة$
 يعدل $م ن س$ فاذا $ا = م ب = م ن س$ وقد فرض $ا = م ب$ فاذا $ا = م ن س$

القضية الرابعة. ن

اذا فرض اربعة مقادير متناسبة اية نسبة الاول الى الثاني كنسبة
 الثالث الى الرابع وضرب الاول والثالث في عدد ما وضرب الثاني
 والرابع في عدد ما فتكون نسبة مضروب الاول الى مضروب الثاني
 كنسبة مضروب الثالث الى مضروب الرابع (انظر كتاب الجبر ع^{١٨٢})
 لفرض $ا : ب :: س : د$ وليكن $م$ ون عددان فحينئذٍ $ا : ن ب :: م : س : ن د$
 ليتعدّد $ا$ وم $س$ مرارًا تعدل الاحاد في $ف$ ولينعدّد $ن ب$ ون $د$ مرارًا تعدل
 الاحاد في $ق$ فلما (ق ٢ ك ه) $ف م ا$ $ف م س$ وايضًا $ق ن ب$ $ق ن د$ فلكون
 $ا : ب :: س : د$ حسب المفروض وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث

اي ف م ا ف م س ومن الثاني والرابع اي ق ن ب ق ن د. فاذا كان ف م ا اكبر
من ق ن ب يكون ف م س اكبر من ق ن د (حده ك ه) فاذا كان ف م ا ق ن ب
متساويين يكون ف م س ق ن د متساويين واذا كان ف م ا اصغر من ق ن ب
يكون ف م س اصغر من ق ن د. ولكن ف م ا ف م س تعديان م ا م س مراراً
متساوية وكذلك ق ن ب ق ن د تعديان ن ب ن د مراراً متساوية ولذلك (حده
ك ه) م ا : ن ب :: م س : ن د

فرغ. اذا فرض ا : ب :: س : د وضرب اوس في عدد ما مثل م تكون نسبة
م ا : ب :: م س : د

القضية الخامسة. ن

اذا فرض مقداران احدهما يعدُّ الآخر مراراً ما وأخذ من كل واحدٍ
منهما مقداراً احدهما يعدُّ الآخر كما يعدُّ احدُ الاولين الآخر فالبقية من
الواحد تعدُّ البقية من الآخر كما يعدُّ كلُّ الواحد كلَّ الآخر (انظر
كتاب الجبر ع ١٦٦)

ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من مقدارين ا وب وليكن ا اكبرها
فالبقية ا - ب يتعدَّد في م ا - م ب مراراً تماثل تعدياد ا في م ا اي م ا - م ب =
م (ا - ب)

ليكن د فضلة ا وب اي ا - ب = د. اصف ب الى الجانين فلما ا = د + ب.
فاذا (ق ا ك ه) م ا = م د + م ب. اطرح م ب من الجانين فلما م ا - م ب = م د
وقد فرض د = ا - ب فاذا م ا - م ب = م (ا - ب)

القضية السادسة. ن

اذا ضرب مقدار في عددٍ ما وطُرح من الحاصل المقدار ذاته مضروباً
في عددٍ اصغر من الاول فالباقي يعدُّ ذلك المقدار مراراً تعدل الاحاد
في فضلة العددين (انظر كتاب الجبر ع ١٦٦)

لفرض ا مقداراً وليتعدد م مرة ون مرة اي م ا ن ا وليكن م اكبر من ن
فحينئذ ا يتعدد في م ا - ن ا مراراً تعدل الاحاد في م - ن اي م ا - ن ا = (م - ن) ا
لفرض ان م - ن = ق فحينئذ م = ن + ق ثم م ا = ن ا + ق ا (ق ٢ ك هـ).
اطرح ن ا من الجانبيين م ا - ن ا = ق ا اي م ا - ن ا يعد ا مراراً تعدل الاحاد
في ق اي م - ن مرة اي م ا - ن ا = (م - ن) ا
فرج. اذا كانت فضلة العددين واحداً اي م - ن = ا فحينئذ م ا - ن ا = ا

قضيه ان

إذا كان أربعة مقادير متناسبة. فهي متناسبة أيضاً بالقلب

مفروض ا: ب :: س: د فحينئذ ب: ا :: د: س
 لينتعدد اوس م مرة اي م ا م س. ولينتعدد ب ود ن مرة اي ن ب ن د.
 فاذا كان م ا اصغر من ن ب يكون م س اصغر من ن د (حد ه ك ه) واذا كان
 ن ب اكبر من م ا يكون ن د اكبر من م س واذا كان ن ب = م ا ن د = م س
 واذا كان ن ب > م ا ن د > م س ولكن ن ب ن د يعتد ب ود مرارا
 متساوية وم ا م س يعتدان اوس مرارا متساوية فاذا (حد ه ك ه) ب: ا :: د: س

قضیة ب ن

في اربعة مقادير اذا تعدد الثاني في الاول او الاول في الثاني كما يتعدد
الرابع في الثالث او الثالث في الرابع تكون نسبة الاول الى الثاني
كنسبة الثالث الى الرابع

اولاً ليتعدد اوب م مرة ثم م ا : ا : م ب : ب
ليتعدد م ا م ب مراراً تعدل الاحاد في ن ا ب م ن مرة. وليتعدد اوب مراراً
تعدل الاحاد في ف ا ب م مرة فلنا (ق ٣ لك ٥) ن م ا ف ا ن م ب ف ب. فاذا
كان ن م ا اكبر من ف ا يكون ن م اكبر من ف. واذا كان ن م اكبر من ف يكون
ن م ب اكبر من ف ب فاذا كان ن م ا اكبر من ف ا يكون ن م ب اكبر من
ف ب واذا كان ن م ا = ف ا = ن م ب = ف ب. واذا كانت ن م ا > ف ا

ن م ب ح ف ب وقد تعدد م ا م ب في ن م ا ن م ب مراراً متساوية. وقد تعدد
ا و ب في ف ا ف ب مراراً متساوية فإذا م ا : ا : م ب : ب (حذ ه ك ه)
ثانياً ليكن س جزاً من ا (حذ ا ك ه) وليكن د ذات ذلك الجزء من ب
فيتعدد س في ا كما يتعدد د في ب وحسبما قد تبرهن ا : س :: ب : د وبالقلب
(ق ا ك ه) س : ا :: د : ب

قضية ج. ن

إذا فرض أربعة مقادير متناسبة أي نسبة الأول الى الثاني كنسبة
الثالث الى الرابع وكان الأول مضروب الثاني أو جزاً منه فالثالث
ذات هذا المضروب أو الجزء من الرابع

مفروض ا : ب :: س : د. وأولاً ليكن ا مضروب ب أي ليتعدد ب في ا مراراً
معلومة فيكون س ذات هذا المضروب من د أي د يتعدد في س كما يتعدد ب في ا
أي إذا كان ا = م ب فحينئذ س = م د

ليتعدد ا وس مرتين مثلاً أي ١٢ ا س وليتعدد ب ود ٢ مرة أي ٢ م ب
٢ م د (ق ٢ ك ه). فن حيث ان ا = م ب ١٢ - ٢ م ب. ومن حيث ان
ا : ب :: س : د و ١٢ = ٢ م ب فإذا ٢ س = ٢ م د (حذ ه ك ه) وس = م د أي د
يتعدد في س مراراً تعدل الاحاد في م أي م مرة أي كما يتعدد ب في ا

ثانياً ليكن ا جزاً من ب فيكون س ذات هذا الجزء من د. لأن ا : ب :: س : د
وبالقلب (ق ا ك ه) ب : ا :: د : س. ولكن ا هو جزء من ب أي ب هو مضروب ا
وكما تقدم د هو ذات هذا المضروب من س أي س ذات الجزء من د الذي كان ا
من ب

القضية السابعة. ن

مقادير متساوية بينها وبين مقدار مفروض تناسب واحد. والمقدار
الواحد بينه وبين مقادير متساوية تناسب واحد. (جبر ع ١٥)

ليكن اوب مقدارين متساويين وس مقداراً اخر فنسبة ا:س :: ب:س
 ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من اوب ون س مضروباً من س
 فلكون ا = ب م = ا م ب (اولية ك ه) فاذا كان م اكبر من ن س يكون م ب
 اكبر من ن س واذا كان م ا = ن س م ب = ن س واذا كان م ا > ن س
 م ب > ن س ولكن م ا م ب مضروبان متساويان من اوب ون س هو
 مضروب من س فاذا (ح د ه ك ه) ا:س :: ب:س
 ثانياً اذا كان ا = ب فنسبة س:ا :: س:ب لانه قد تبرهن ان ا:س :: ب:س
 وبالقلب (ق ا ك ه) س:ا :: س:ب

القضية الثامنة. ن

اذا فرض مقادير غير متساوية فتناسب الاكبر الى مقدار مفروض هو
 اعظم من تناسب الاصغر الى ذلك المقدار. وتناسب ذلك المقدار الى
 الاصغر هو اعظم من تناسبه الى الاكبر (جبر ع ١٦٣ وع ١٦٤)

ليكن ا + ب مقداراً اكبر من مقدار اخر هو ا وليكن س مقداراً ثالثاً فتناسب
 ا + ب الى س هو اعظم من تناسب ا الى س وتناسب س الى ا هو اعظم من تناسب
 ا الى ا + ب

ليكن م عدداً وليكن كل من م ا م ب اكبر من س. وليكن ن س المضروب
 الاصغر من س الذي يزيد على م ا + م ب ثم ن س - س اي (ن - ا) س (ق ا
 ك ه) يكون اصغر من م ا + م ب اي م ا + م ب او م (ا + ب) هو اكبر من
 (ن - ا) س لان ن س هو اكبر من م ا + م ب وس اصغر من م ب يكون ن س -
 س اكبر من م ا اي م ا هو اصغر من ن س - س اي من (ن - ا) س. فاذا
 المضروب ا + ب في م هو اكبر من المضروب س في ن - ا ولكن المضروب ا في م
 ليس باكبر من المضروب س في ن - ا فاذا تناسب ا + ب الى س هو اعظم من
 تناسب ا الى س (ح د لا ك ه)

ثم من حيث ان المضروب س في ن - ا هو اكبر من المضروب ا في م وليس

أكبر من المضروب $a + b$ في m فتناسب s الى a هو اعظم من تناسب a الى b
(حد ٧ ك ٥)

القضية التاسعة. ن

المقادير التي لها تناسب واحد الى مقدار مفروض هي متساوية وإذا كان
لمقدار واحد تناسب واحد الى مقادير فهي متساوية (جبر ع ١٥٨)

مفروض $a : s :: b : s$ فحينئذ $a = b$

والأفليكن a أكبر من b ، فيمكن وجود عدد n من m ون كما في القضية السابقة
حتى يكون m أكبر من n s ولا يكون m أكبر من n s ومن حيث ان
 $a : s :: b : s$ فاذا كان m أكبر من n s يكون m أيضاً أكبر من n s
(حد ٥ ك ٥) وقد تبرهن ان m ليس أكبر من n s وذلك محال فلا يكون
أكبر من b اي $a = b$

ثم لنفرض $s : a :: s : b$ فحينئذ $a = b$ لأنه بالقلب (ق الك ٥) $a : s :: b : s$
س ولذلك حسبنا تقدم $a = b$

القضية العاشرة. ن

إذا فرض مقداران وكان بين أحدهما ومقدار ثالث تناسب أعظم من
تناسب ثانيهما الى ذلك المقدار فالاول أكبرها. وإذا كان تناسب
الثالث الى أحدهما أعظم من تناسبه الى الآخر فهو أصغرهما (جبر
ع ١٦٣ وع ١٦٤)

إذا كان تناسب a الى s أعظم من تناسب b الى s يكون a أكبر من b
لأنه حسب المفروض $a : s < b : s$ فيمكن وجود عدد n من m حتى يكون
 $m < n$ s و $m > n$ s (حد ٧ ك ٥) فيكون $m < n$ s و $m < n$ s
(أولية ٤ ك ٥)

ثم ليكن $s : b < s : a$ فيكون $b > a$ لأنه قد يمكن ان يوجد عددان

م ون حتى يكون م س < ن ب و م س > ن ا (حد ٧ كه) فمن حيث ان ن ب اصغر من م س ون ا اكبر من م س يكون ن ب > ن ا فيكون ب > ا

القضية الحادية عشرة . ن

التناسبات التي تعدل تناسبا واحدا هي متساوية (جبر ع ١٨٢)

مفروض ا : ب :: س : د و س : د :: ي : ف فحينئذ ا : ب :: ي : ف
لنفرض م ا م س م ي مضارب متساوية من ا وس و ي وايضا ن ب ن د
ن ف مضارب متساوية من ب ود وف . فلكون ا : ب :: س : د فاذا كان
م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ٥ كه) . ولكن اذا كان م س < ن د
يكون م ي < ن ف (حد ٥ كه) لان س : د :: ي : ف فاذا كان م ا < ن ب
يكون م ي < ن ف . وهكذا اذا كان م ا = ن ب فيكون م ي = ن ف واذا كان
م ا > ن ب يكون م ي > ن ف ولكن م ا م ي ها مضروبان متساويان من
ا و ي . ون ب ن ف ها مضروبان متساويان من ب وف فاذا ا : ب :: ي : ف
(حد ٥ كه)

القضية الثانية عشرة . ن

اذا كانت عدة مقادير متناسبة فنسبة مجتمع السوابق الى مجتمع التوالي كنسبة احد السوابق الى تاليه (جبر ع ١٦٦)

مفروض ا : ب :: س : د و س : د :: ي : ف فنسبة ا : ب :: ا + س + ي : ب + د + ف

افرض م ا م س م ي مضارب متساوية من ا وس و ي . وايضا ن ب ن د
ن ف مضارب متساوية من ب ود وف . فمن حيث ان ا : ب :: س : د فاذا كان
م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ٥ كه) . واذا كان م س < ن د يكون
م ي < ن ف لان س : د :: ي : ف . فاذا كان م ا < ن ب يكون م ا + س
+ م ي < ن ب + ن د + ن ف وكذلك . اذا كان م ا = ن ب يكون م ا + س
+ م ي = ن ب + ن د + ن ف واذا كان م ا > ن ب يكون م ا + س +

م > ن ب + ن د + ن ف . ولكن م + م س + م ي = م (ا + س + ي)
 (فرع ق ا ك ه) وم ا + م س + م ي هما مضروبان متساويان من ا ومن ا +
 س + ي . ولهذا السبب ايضا يكون ن ب ون ب + ن د + ن ف مضروبين
 متساويين من ث ومن ب + د + ف فيكون (حد ه ك ه) ا : ب :: ا + س +
 ي : ب + د + ف

القضية الثالثة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع
 ولكن تناسب الثالث الى الرابع اعظم من تناسب الخامس الى
 السادس فيكون تناسب الاول الى الثاني اعظم من تناسب الخامس
 الى السادس (جبر ع ١٨٣)

مفروض ا : ب :: س : د ولكن س : د < ي : ف فينتج ا : ب < ي :
 ف . لان س : د < ي : ف فيمكن وجود عددين م ون حتى يكون م س < ن د
 ويكون م ي > ن ف (حد ٧ ك ه) . فاذا كان م س < ن د يكون م ا < ن ب
 لان ا : ب :: س : د فيكون م ا < ن ب وم ي > ن ف فاذا ا : ب < ي :
 ف (حد ٧ ك ه)

القضية الرابعة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع فاذا
 كان الاول اكبر من الثالث يكون الثاني اكبر من الرابع واذا عدل
 الاول الثالث يعدل الثاني الرابع واذا كان الاول اصغر من الثالث
 يكون الثاني اصغر من الرابع (جبر ع ١٩٢)

مفروض ا : ب :: س : د فاذا كان ا < س يكون ب < د واذا كان ا =
 س يكون ب = د واذا كان ا > س يكون ب > د

اولاً ليكن $a < b$ ثم $a : b :: c : d$ (ق ٨ ك ٥) ولكن $a : b :: c : d$
 د فاذاً $a : d :: c : b$ (ق ١٢ ك ٥) ولذلك $b < d$ (ق ١٠ ك ٥)
 وهكذا يبرهن انه اذا كان $a = b$ فحينئذ $b = d$ واذا كان $a > b$ يكون
 $b > d$

القضية الخامسة عشرة. ن

المقادير بينها ذات التناسب الواقع بين مضاريبها المتساوية (جبر
 (ع ١٦٤))

ليكن a و b مقدارين وم عدداً ما فتناسب $a : b :: m : n$
 لأن $a : b :: 1 : 1$ (ق ٧ ك ٥) فيكون $a : b :: 1 + 1 : 1 + 1$ (ق ١٢
 ك ٥) اي $a : b :: 2 : 2$ وهكذا ايضاً من حيث ان $a : b :: 12 : 12$
 يكون $a : b :: 1 + 12 : 1 + 12$ (ق ١٢ ك ٥) اي $a : b :: 13 : 13$
 وهم جراً في كل المضاريب المتساوية من a و b

القضية السادسة عشرة. ن

اذا كان اربعة مقادير من جنس واحد متناسبة تكون متناسبة ايضاً
 بالمبادلة (جبر ع ١٨١)

اذا كان $a : b :: c : d$ فبالمبادلة $a : c :: b : d$
 خذ m n ب مضروبين متساويين من a و b و n m ب مضروبين
 متساويين من c و d ثم (ق ١٥ ك ٥) $a : c :: m : n$ وقد فرض $a : b :: c : d$
 فاذاً (ق ١١ ك ٥) $c : d :: m : n$ ولكن $a : c :: m : n$ (ق ١٥ ك ٥)
 فاذاً $a : m :: c : n$ (ق ١١ ك ٥) فاذاً كان $m < n$ يكون $m < n$
 (ق ١٤ ك ٥) واذا كان $m = n$ يكون $m = n$ واذا كان $m > n$ يكون
 $m > n$ فاذاً (ق ١٥ ك ٥) $a : c :: m : n$

القضية السابعة عشرة. ن

المقادير المناسبة بالاجمال هي متناسبة ايضاً بالافراد. اي اذا كان
تناسب الاول مع الثاني الى الثاني مثل تناسب الثالث مع الرابع الى
الرابع يكون تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع

(جبر ع^{١٨})

مفروض $a+b : b :: s : d$ فحينئذ $a : b :: s : d$
خذ m ان b مضروبين من a و b في العدد m ون. واولاً ليكن $m < n$ ب.
اضف الى كل واحد منهما m فلنا $m+a < m+b$ و $m+n < m+b$ ولكن $m+a = m$
 $m+(a+b)$ (فرع a ك e) و $m+b+n = m+n$ (فرع a ق a ك e)
فاذا $m+(a+b) < m+n$ ب

ومن حيث ان $a+b : b :: s : d$ فاذا كان $m+(a+b) < m+n$ ب
يكون $m+(s+d) < m+n$ د اي $m+s < m+d$ و $n+d < m+d$ ويطرح m من
الجانبيين $m+s < n$ د. فاذا كان $m < n$ ب يكون $m+s < n$ د. وهكذا يبرهن
انه اذا كان $m = n$ ب يكون $m+s = n+d$ و اذا كان $m > n$ ب يكون $m+d > n$ د
فاذا $a : b :: s : d$ (حده ك e)

القضية الثامنة عشرة. ن

المقادير المناسبة بالافراد هي متناسبة ايضاً بالاجمال. اي اذا كان
الاول الى الثاني كالثالث الى الرابع يكون الاول مع الثاني الى الثاني
كالثالث مع الرابع الى الرابع (جبر ع^{١٨})

ليكن $a : b :: s : d$ فحينئذ $a+b : b :: s : d$
لنفرض $m+(a+b) > m+n$ ب مضروبين من $a+b$ و b واولاً ليكن m اعظم من
 n . فليكون $a+b$ اعظم من b يكون $m+(a+b) > m+n$ ب وايضاً $m+(s+d) > m+n$
 n د فاذا كان $m < n$ ب يكون $m+(a+b) < m+n$ ب و $m+(s+d) < m+n$ د.

وهكذا يبرهن انه اذا كان $m = n$ فيكون $m(a+b)$ اعظم من n ب $m(s+d)$
 اعظم من n د

ثم ليكن م > ن ا و ن < م فقد يمكن ان يكون م (ا + ب) اعظم من ن ب
او مساويا له او اصغر منه. اولاً ليكن م (ا + ب) اعظم من ن ب فيكون م + ا +
ب < ن ب اطرح من المجانيين م ب الذي هو اصغر من ن ب فلنا م ا <
ن ب - م ب اية م ا < (ن - م) ب (ق ٦ ك ٥). ولكن اذا كان م ا < (ن
- م) ب يكون م س < (ن - م) د لان ا : ب :: س : د. و (ن - م) د = ن
د - م د (ق ٦ ك ٥) فاذا م س < ن د - م د. اضف اليهما م د فلنا م س + م د <
ن د اي (ق ١ ك ٥) م (س + د) < ن د. فاذا كان م (ا + ب) < ن ب يكون
م (س + د) < ن د

وهكذا يبرهن انه اذا كان $m = (a + b)$ n ب يكون $m = (s + d) = n$ d
واذا كان $m = (a + b)$ $n > b$ ب يكون $m = (s + d) > n$ d فاذا (حده كـه)
 $a + b : b :: s + d : d$

القضية التاسعة عشرة. ن

اذا كانت نسبة مقدار كل واحد الى مقدار اخر كله كمقدار ماخوذ من الاول الى مقدار ماخوذ من الثاني تكون نسبة البقية الى البقية كالكل الى الكل
(جبر ع^{١٨٨})

إذا كان ا: ب :: س: د وكان س اصغر من ا يكون ا- س: ب- د :: ا: ب
 بما ان ا: ب :: س: د فبالقلب (ق ١٦ ك ٥) ا: س :: ب: د وبالقسمة
 (ق ١٧ ك ٥) ا- س: س: ب- د: د وبالقلب ايضاً ا- س: ب- د :: س: د
 ولكن ا: ب :: س: د فاذا (ق ١١ ك ٥) ا- س: ب- د :: ا: ب
 فرع ١- س: ب- د :: س: د

قضیة د. د. ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة فهي متناسبة ايضا بالطرح اي الاول

الى زيادته عن الثاني كالثالث الى زيادته عن الرابع (حد ١٨ كه)
 مفروض ا: ب :: س : د فبالطرح ا: ا-ب :: س : س-د
 لان ا: ب :: س : د فبالقسمة (ق ١٧ كه) ا-ب : ب :: س-د : د
 وبالقالب (ق ١٨ كه) ب : ا-ب :: د : س-د ثم بالتركيب (ق ١٨ كه)
 ا: ا-ب :: س : س-د
 فرع . وهكذا يبرهن ان ا: ا+ب :: س : س+د

القضية العشرون

اذا فرض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة مقادير آخر اية كل اثنين من
 الأول مناسبان لكل اثنين من الآخر فاذا كان الأول اعظم من
 الثالث يكون الرابع اعظم من السادس واذا كان مساوياً له يكون
 الرابع مساوياً للسادس واذا كان اصغر منه يكون الرابع اصغر من
 السادس (جبر ع ١٩٢)

اذا فرض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة آخر د ي ف وكانت نسبة

ا	ب	س
د	ي	ف

ا: ب :: د: د ي وايضاً ب: س :: ي: ف فاذا كان ا < س
 يكون د < ف واذا كان ا = س يكون د = ف واذا كان
 ا > س يكون د > ف

اولاً ليكن ا < س ثم ا: ب < س: ب (ق ٨ كه) ولكن ا: ب :: د: د ي
 فاذا د: د ي < س: ي (ق ١٢ كه) وقد فرض ب: س :: ي: ف وبالقالب
 (ق ١٨ كه) س: ب :: د: ي وقد تبرهن ان د: ي < س: ب فاذا د: د ي < س: ب
 ف: ي (ق ١٢ كه) وبالضرورة د < ف (ق ١٠ كه)
 ثم لنفرض ا = س ثم ا: ب :: س: ب (ق ٧ كه) ولكن ا: ب :: د: د ي
 فاذا س: ب :: د: د ي ولكن س: ب :: ي: ف فاذا د: د ي :: ي: ف (ق ١١ كه)
 د = ف (ق ٩ كه). اخيراً ليكن ا > س اي س < ا وقد تبرهن ان

س : ب :: ف : ي وب : ا :: ي : د فاذا كان س < ا يكون ف < د اي اذا
كان ا > س يكون د > ف

القضية الحادية والعشرون

اذا فُرض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة اخر بحيث يكون الاول الى
الثاني كالخامس الى السادس والثاني الى الثالث كالرابع الى الخامس
فان كان الاول اعظم من الثالث فيكون الرابع اعظم من السادس وان
كان مساوياً له فيكون الرابع مساوياً للسادس وان كان اصغر منه
فيكون الرابع اصغر من السادس (جبر ع^{١٩٢})

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة آخر د ي ف وتناسب ا : ب :: ي : ف
وب : س :: د : ي فاذا كان ا < س يكون د < ف واذا
كان ا = س يكون د = ف واذا كان ا > س يكون د > ف
اولاً ليكن ا < س ثم ا : ب :: س : ب (ق ٨ ك ٥) وقد فُرض ا : ب :: ي :
ف فاذا ا : ي : ف < س : ب (ق ١٢ ك ٥) وب : س :: د : ي بالمفروض وبالقلب
س : ب :: ي : د فاذا ا : ي : ف < ي : د (ق ١٢ ك ٥) ود < ف (ق ١٠ ك ٥)
ثم ليكن ا = س فلنا (ق ٧ ك ٥) ا : ب :: س : ب وبالمفروض ا : ب :: ي : ف
فاذا س : ب :: ي : ف (ق ١١ ك ٥) وبالمفروض ب : س :: د : ي وبالقلب
س : ب :: ي : د فاذا (ق ١١ ك ٥) ي : ف :: ي : د ود = ف (ق ٩ ك ٥)
اخيراً ليكن ا > س اي س < ا فقد تبهرن ان س : ب :: ي : د وب :
ا : ف :: ي : ف فسيما تقدم اذا كان س < ا فيكون ف < د اي د > ف

القضية الثانية والعشرون

اذا فُرضت عدة مقادير مناسبة لعدة اخرى من المقادير على ترتيبها
فيكون تناسب الاول الى الاخير من الاول كتناسب الاول من
الاخر الى الاخير (جبر ع^{١٨٤})

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س مناسبة لثلاثة اخرى د ي ف على ترتيبها

اي ا : ب :: د : د ي وب : س :: ي : ف	١	ب	س
فيكون ا : س :: د : د ف	د	ي	ف
خذ مضروبين متساويين من ا و د اي	٢	ن ب	ق س
م ا م د وكذلك ن ب ن ي من ب و ي	م د	ن ي	ق ف

وق س ق ف من س وف. فلكون ا : ب :: د : د ي فيكون م ا : ن ب :: م د : ن ي (ق ٤ ك ٥) وايضا ن ب : ق س :: ن ي : ق ف فاذا (ق ٣٠ ك ٥) حسبها كان م ا اعظم من ق س او مساويا له او اصغر منه يكون م د اعظم من ق ف او مساويا له او اصغر منه. ولكن م ا م د هما مضروبان متساويان من ا و د وق س ق ف مضروبان متساويان من س وف فاذا (د ٥ ك ٥) ا : س :: د : ف
ثم لنفرض اربعة مقادير ا ب س د و اربعة اخرى ف غ ح متناسبة على

ترتيبها اي ا : ب :: ي : ف	١	ب	س	د
وب : س :: ف : غ وس :	ي	ف	غ	ح
د : غ :: ح فيكون ا : د ::				
ي : ح				

لأنه حسبنا تقدم في المقادير الثلاثة المتقدم ذكرها مع الثلاثة الاخر المتقدم ذكرها
ا : س :: ي : غ وبالمفروض س : د :: غ : ح فيكون ا : د :: ي : ح وهكذا هما تعددت المقادير

القضية الثالثة والعشرون

اذا كانت عدة مقادير مناسبة لعدة اخرى على ترتيب كالمدكور في
القضية الحادية والعشرين يكون تناسب الاول الى الاخير من الاولى
كتناسب الاول من الاخرى الى اخيرها (جبر ع ١٨٦)
اولا يفرض ثلاثة مقادير ا ب س متاسبة لثلاثة اخرى د ي ف بان

يكون ا:ب::ى:ف وب:س::د:ى فيكون ا:س::د:ف. خذ مضارب

ا	ب	س
د	ى	ف
م	م	ن
د	ن	ف

متساوية من ا ب د اى م ب
م د وكذلك من س ى ف اى
ن س ن ى ن ف
فلكون ا:ب::ى:ف
وا:ب::م:ا:م ب (ق ١٥ كه)

وى:ف::ن:ى:ن:ف فيكون م:ا:م ب::ن:ى:ن:ف (ق ١١ كه) ولكون
ب:س::د:ى يكون م ب:ن س:م د:ن ى (ق ١٤ كه) وقد تهرن ان
م:ا:م ب::ن:ى:ن:ف فاذا كان م:ا:ن س يكون م د<ن ف (ق ٢١ كه)
واذا كان م:ا:ن س يكون م د=ن ف واذا كان م:ا:ن س يكون م د>ن ف.
ولكن م:ا:م دها مضروبان متساويان من اود ون س ن ف مضروبان متساويان
من س وف فاداً (حده كه) ا:س:د:ف

ثم ليُفرض اربعة مقادير مناسبة لاربعة اخرى على الترتيب السابق اى ا:ب::

ا	ب	س	د
ى	ف	غ	ح

غ:ح وب:س::ف:ع
وس:د::ى:ف فيكون
ا:د::ى:ح. لانه حسبا

نقدم ا:س::ف:ح وبالمفروض س:د::ى:ف فحسبها تقدم ايضاً ا:د::ى:ح
وهكذا مهما تعددت المقادير

القضية الرابعة والعشرون

اذا كان تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع وتناسب
الخامس الى الثاني كتناسب السادس الى الرابع يكون تناسب الاول
مع الخامس الى الثاني كتناسب الثالث مع السادس الى الرابع
(جبر ع^{١١})

مفروض ا:ب::س:د وى:ب::ف:د فيكون ا+ى:ب+س::

ف:د

لأنَّ ي : ب :: ف : د فبالقلب ب : ي :: د : ف وبالمفروض ا : ب :: س : د
فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا : ي :: س : ف وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) ا + ي : ي ::
س + ف : ف وبالمفروض ايضاً ي : ب :: ف : د فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا + ي :
ب :: س + ف : د

قضية ٥٠ ن

إذا كان اربعة مقادير متناسبة فجميع الاولين الى فضلتهما كجميع
الاخرين الى فضلتهما

مفروض ا : ب :: س : د وإذا كان ا < ب فيكون ا + ب : ا - ب :: س +
د : س - د وإذا كان ا > ب ا + ب : ب - ا :: س + د : د - س
لأنه إذا كان ا < ب فمن حيث ان ا : ب :: س : د فبالقسمة (ق ١٧ ك ٥)
ا - ب : ب :: س - د : د وبالقلب (ق ١ ك ٥)
ب : ا - ب :: د : س - د وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥)
ا + ب : ب :: س + د : د فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)
ا + ب : ا - ب :: س + د : س - د
وهكذا إذا كان ا > ب اوب < ا يبرهن ان
ا + ب : ب - ا :: س + د : د - س

قضية ٥٠ و

التناسبات المركبة من تناسبات متساوية هي متساوية بعضها لبعض
لفرض ان تناسب ا الى س قد تركب من تناسين اي تناسب ا : ب وتناسب
ب : س وان تناسب د الى ف قد تركب من تناسب د : ي وتناسب ي : ف
المساويين للاولين اي ا : ب وب : س فيكون ا : س : د : ف

١	ب	س
د	ي	ف

اولاً إذا كان تناسب ا : ب = د : ي
وتناسب ب : س = ي : ف فبالمساواة
(ق ٢٢ ك ٥) ا : س :: د : ف

ثانياً اذا كان $ا : ب = د : ح$ و $ب : ح = د : ح$ فيالمساواة بالقلب (ق ٢٢
لكه) $ا : د :: د : ح$ وهكذا تعددت التناسبات

قضية ز. ن

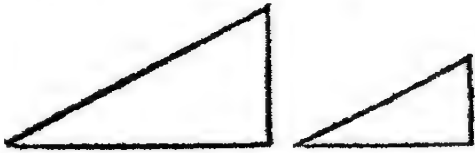
اذا قاس مقداراً كلاً من مقدارين آخرين يقيس ايضاً مجتمعها وفضلتهما
لنفرض ان $س$ يقيس $ا$ اي يتعدد فيه تسع مرات مثلاً وايضاً ليقس $ب$ خمس
مرات مثلاً فلنا $ا = ٩ س$ و $ب = ٥ س$ فيكون $ا$ و $ب$ معاً ١٤ مرة $س$ اي $س$ يقيس
مجتمع $ا$ و $ب$ وفضلتهما هي اربعة امثال $س$ فاذا $س$ يقيس هذه الفضلة ايضاً. وهكذا
مهما كانت الاعداد المفروضة. فلنفرض $ا = م س$ و $ب = ن س$ ثم $ا + ب = (م + ن) س$
 $س$ و $ا - ب = (م - ن) س$
فرع. اذا كان $س$ قياساً للمقدار $ب$ وايضاً للمقدار $ا - ب$ او $ا + ب$ فانه يقيس
المقدار ايضاً لان مجتمع $ب$ و $ا - ب$ هو $ا$ وفضلته $ب$ و $ا + ب$ هي $ا$ ايضاً

اصول الهندسة

الكتاب السادس

حدود

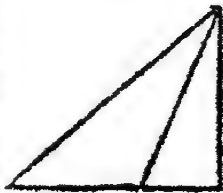
١ اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة هي ما كانت زواياها متساوية
كل واحدة تعدل نظيرها. والاضلاع
المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة
في شكلين متناسين الاضلاع التي



تلي الزوايا المتساوية تسمى متشابهة. والزوايا تسمى الزوايا المتشابهة. وفي الدوائر
الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطعان المتشابهة هي التي تقابل زوايا متساوية
عند المركز

٢ اذا كانت نسبة ضلع شكل الى ضلع شكل آخر كنسبة ضلع اخر من
الثاني الى اخر من الاول يقال انها متناسبة بالتكافؤ

٣ اذا انقسم خط مستقيم بحيث تكون نسبة الكل الى القسم الاطول كالقسم
الاطول الى الاقصر يقال انه قد انقسم على نسبة متوسطة

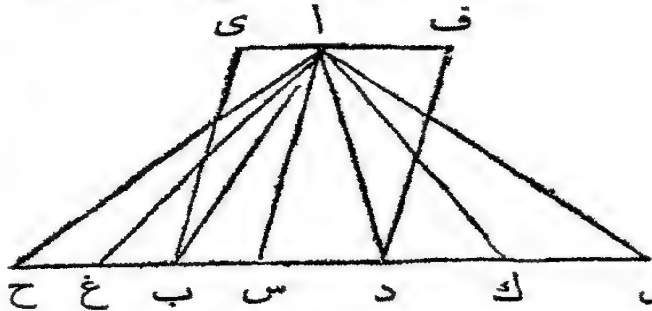


٤ علو مثلث هو البعد العمودي من راسه الى قاعدته
علو شكل متوازي الاضلاع هو البعد العمودي بين
ضلعيه المتقابلين محسوبين قاعدتين وعلو شبهه المعين هو
البعد العمودي بين ضلعيه المتوازيين

القضية الاولى . ن

نسبة مثلثات واشكال متوازية الاضلاع على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن المثلثان ا ب س ا س د والشكلان المتوازي الاضلاع ي س س ف



على علو واحد اي عمود من ا

الى ب د فنسبة المثلث ا ب س

الى المثلث ا س د ونسبة الشكل

ي س الى شكل س ف كنسبة

القاعدة ب س الى القاعدة س د

اخرج ب د الى الجهتين الى ح ول حتى ينقسم ح ب الى اقسام تعدل ب س

مثل ح غ غ ب واقسم د ل الى اقسام تعدل س د مثل ل ك ك د وارسم ا ح

ا ك ا ل

فلكون س ب ب غ غ ح متساوية تكون المثلثات ا ح غ غ ب ا ب س

متساوية (ق ٢٨ ك ١) وكما تعددت القاعدة ب س في القاعدة ح س هكذا يتعدّد

المثلث ا ب س في المثلث ا ح س وكذلك كما تتعدّد القاعدة د س في القاعدة س ل

هكذا يتعدّد المثلث ا س د في المثلث ا س ل . واذا كانت القاعدة ح س تعدل

القاعدة س ل يكون المثلثان ا ح س ا ل س متساويين (ق ٢٨ ك ١) واذا كانت

القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث ا ح س اكبر من المثلث ا ل س وان

كانت اصغر فاصغر . فلنا اربعة مقادير وهي القاعدتان ب س س د والمثلثان

ا ب س ا س د وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث اية القاعدة

ب س والمثلث ا ب س وهما القاعدة ح س والمثلث ا ح س وهكذا من القاعدة

س د والمثلث ا س د وهما القاعدة س ل والمثلث ا ل س وقد تبرهن انه اذا كانت

القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث ا ح س اكبر من ا ل س وان كانت

متساوية لها فالمثلث ا ح س يعدل المثلث ا ل س وان كانت اصغر فاصغر منه

فنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د كنسبة المثلث ا ب س الى المثلث ا س د

(حد ه ك ه)

ثم لكون الشكل المتوازي الاضلاع س ي هو مضاعف المثلث ا ب س
(ق ٤١ ك ١) والشكل س ف مضاعف المثلث ا س د وبين المقادير ذات النسبة
الكائنة بين مضاربيها المتساوية (ق ١٥ ك ٥) يكون الشكل ي س الى الشكل س ف
كالمثلث ا ب س الى المثلث ا س د. وقد تبرهن ان ب س : س د :: ا ب س :
ا س د فبالمساواة الشكل س ي الى الشكل س ف كالفائدة ب س الى القاعدة
س د (ق ١١ ك ٥)

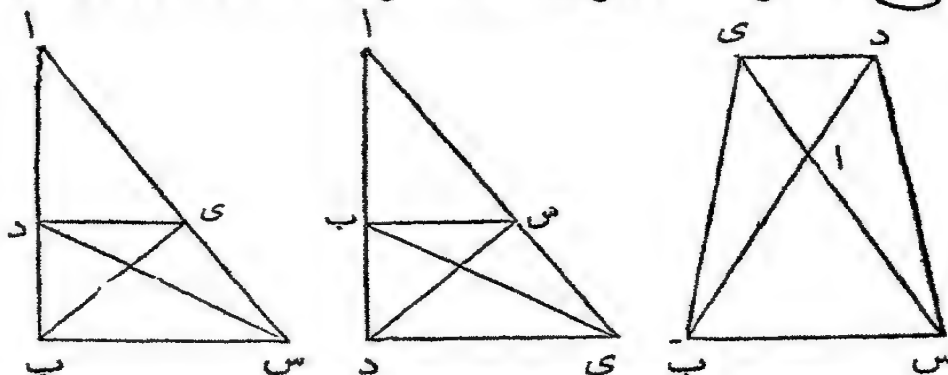
فرغ. نسبة المثلثات الى الاشكال المتوازية الاضلاع هي كنسبة قواعدها
بعضها الى بعض اذا كانت المثلثات والاشكال على علو واحد

القضية الثانية ن

اذا رُسم خطٌ مستقيم حتى يوازي ضلع مثلث فانه يقطع الضلعين
الآخرين او الخططين الحاصلين من اخراجهما حتى تكون اقسامهما
متناسبة. واذا قُطع الضلعان او الخططان الحاصلان من اخراجهما حتى
تكون اقسامهما متناسبة فالخط المستقيم الذي يقطعهما يوازي الضلع
الآخر من المثلث

ليكن ا ب س مثلثا ويرسم د ي حتى يوازي ب س فتكون نسبة ب د : د ا ::
س ي : ي ا

ارسم ب ي س د. فالمثلث ب د ي يعدل المثلث س د ي (ق ٢٧ ك ١)
لانهما على قاعدة واحدة د ي وبين خطين متوازيين ب س د ي. واد ي مثلث

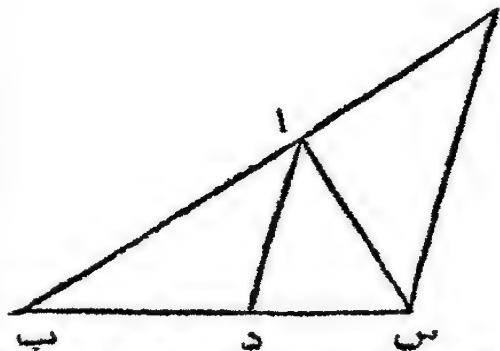


آخر والمقادير المتساوية لها نسبة واحدة الى مقدار آخر (ق ٧ ك ٥) اي المثلث ب د ي الى المثلث ا د ي كالمثلث س د ي الى المثلث ا د ي ولكن ب د ي : ا د ي :: ب د : دا (ق ١ ك ٦) لان لها علواً واحداً اي عموداً من ي الى ب ا ولهذا السبب ايضاً س د ي : ا د ي :: س ي : ي ا فاذا ب د : دا :: س ي : ي ا ثم لنفرض ان الضلعين ا ب ا س او الخطين الحاصلين من اخراجها قد قُطعا في د و ي حتى تكون نسبة ب د : دا :: س ي : ي ا فالخط المستقيم د ي الموصل بين نقطتي القطع يوازي ب س . ثم الشكل كما تقدم . فلكون ب د : دا :: س ي : ي ا ولكون ب د : دا :: ب د ي : ا د ي (ق ١ ك ٦) وس ي : ي ا :: س د ي : ا د ي يكون المثلث ب د ي : ا د ي :: س د ي : ا د ي اي المثلثان ب د ي وس د ي لها نسبة واحدة الى مثلث آخر ا د ي فالمثلث ب د ي = س د ي (ق ٩ ك ٥) وهما على قاعدة واحدة د ي والمثلثات المتساوية اذا كانت على قاعدة واحدة هي بين خطين متوازيين (ق ٢٩ ك ١) فالخط د ي يوازي الخط ب س

القضية الثالثة . ن

اذا تنصفت زاوية مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة ايضاً فقسم القاعدة بينهما النسبة الكائنة بين الضلعين الآخرين من المثلث . واذا كانت نسبة قسبي القاعدة بعضهما الى بعض كنسبة الضلعين الآخرين من المثلث بعضهما الى بعض فالخط المستقيم المرسوم من نقطة القطع الى الزاوية المقابلة ينصف تلك الزاوية

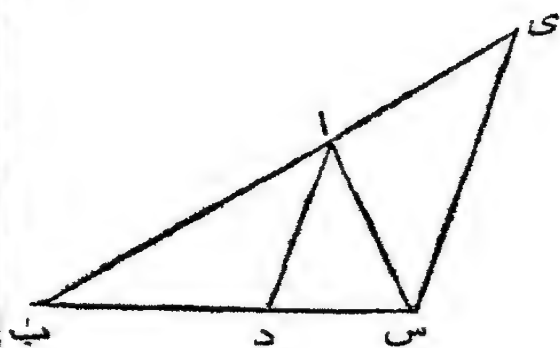
ليكن ا ب س مثلثاً ولتنصف الراوية ب ا س منه بالخط المستقيم ا د الذي يقطع القاعدة في د فنسبة ب د : د س ::



ب ا : ا س
من النقطة س ا رسم س ي حتي يوازي دا وليلاق ب ا بعد اخراجه في ي . فلان الخط المستقيم ا س يلاقي الخطين المتوازيين ا د ي س فالزاوية ا س ي تعدل المتبادلة

س ا د (ق ٢٩ ك ١) وس ا د حسب المفروض تعدل ب ا د فالزاوية ب ا د تعدل
اس ي. ولأن الخط المستقيم ب ا ي يلاقي المتوازيين ا د ي س فالزاوية الخارجة
ب ا د تعدل الداخلة المقابلة ا ي س. ولكن ب ا د تعدل اس ي فالزاوية اس ي
تعدل ا ي س فالضلع ا ي يعدل الضلع س ا (ق ٦ ك ١) ولكون ا د قد رُسم
حتى يوازي ي س احد اضلاع المثلث ب ي س فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا ي
(ق ٢ ك ٦) و ا ي = ا س فاذا ب د : د س :: ب ا : ا س (ق ٧ ك ٥)

ثم لنفرض ب د : د س :: ب ا : ا س. ارسم ا د فالزاوية ب ا س قد تنصفت
بالخط المستقيم ا د



ثم الشكل كما تقدم. فلكون
ب د : د س :: ب ا : ا س وب د :
د س :: ب ا : ا ي (ق ٢ ك ٦) لأن
ا د يوازي ي س فنسبة ا ب : ا س ::
ا ب : ا ي (ق ١ ك ٥) فاذا ا س =
ا ي (ق ٩ ك ٥) والزاوية ا ي س =

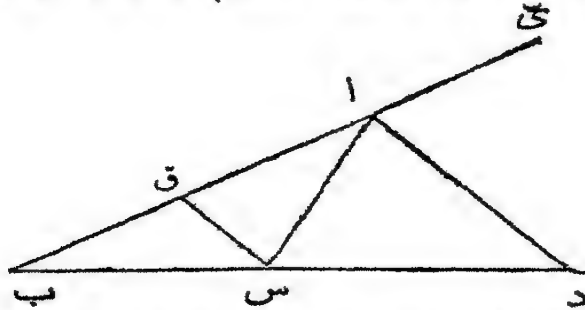
اس ي (ق ٥ ك ١) و ا ي س تعدل الخارجة المقابلة ب ا د و ا س ي تعدل المتبادلة
س ا د (ق ٢٩ ك ١) فالزاوية ب ا د = س ا د فقد تنصفت الزاوية ب ا س بالخط
المستقيم ا د

قضية ألف. ن

إذا تنصفت الزاوية الخارجة من مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة
بعد اخراجها فنسبة القسمين بين الخط القاطع وطرفي القاعدة
بعضها الى بعض كنسبة الضلعين الآخرين من المثلث بعضها الى
بعض. وإذا كانت نسبة قسمي القاعدة بعد اخراجها بعضها الى بعض
كنسبة الضلعين الآخرين من المثلث بعضها الى بعض فالخط

الموصل بين نقطة القطع والزاوية المقابلة ينصف الزاوية الخارجة من المثلث

ليكن AB مثلثا ولننصف زاوية الخارجة بالخط المستقيم AD الذي يلاقي القاعدة بعد اخراجها في D فنسبة $B : D :: A : S$



من النقطة S ارسم SC حتى يوازي DA (ق ٢١ ك ١) فلكون الخط المستقيم AS يلاقي المتوازيين AD و SC

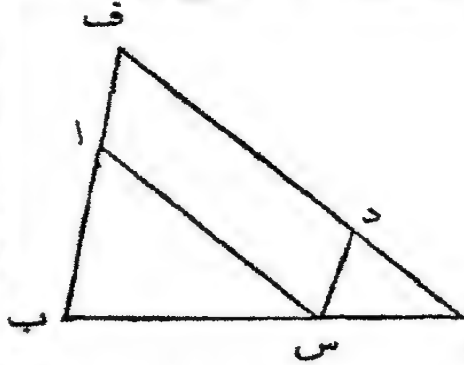
فالزاوية ASD تعدل المتبادلة SCD (ق ٢٩ ك ١) و ASD تعدل DAI حسب المفروض فالزاوية DAI تعدل ASD وكون الخط المستقيم AI يلاقي المتوازيين SC و DA فالزاوية الخارجة DAI تعدل الداخلة المتقابلة SCD و قد تبرهن ان ASD تعدل DAI فالزاوية ASD تعدل الزاوية SCD والضلع SD يعدل الضلع SC (ق ٦ ك ١) وكون AD يوازي SC ضلعا من المثلث BSD فنسبة $B : D :: S : C$ الى ASD (ق ٢ ك ٦) و ASD يعدل ASD فنسبة $B : D :: S : C$

ثم لنفرض $B : D :: S : C$ و ASD ارسم AD فالزاوية ASD تعدل الزاوية DAI و ASD تعدل SCD فلكون $B : D :: S : C$ و ASD و SCD و DAI و SCD فنسبة $B : D :: S : C$ و ASD و SCD و DAI و SCD (ق ٢ ك ٦) فنسبة $B : D :: S : C$ و ASD و SCD و DAI و SCD (ق ٩ ك ٥) والزاوية ASD تعدل الزاوية SCD (ق ٥ ك ١) والزاوية ASD تعدل الخارجة DAI و ASD تعدل المتبادلة SCD فالزاوية $DAI = ASD$

القضية الرابعة. ن

في مثلثات متساوية الزوايا الاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية هي متناسبة والاضلاع المقابلة الزوايا المتساوية هي متشابهة اي هي سوايق نسب وتواليها

ليكن ا ب س د س ي مثلثين متشابهين اي متساويي الزوايا ا ب س الزاوية
ا ب س تعدل د س ي والزاوية ا س ب تعدل د ي س وبالتيجة (فرع ق ٢٢ ك ١)



الزاوية ب ا س تعدل س د ي فالاضلاع
التي تلي هذه الزوايا المتساوية هي متناسبة
والاضلاع التي تقابلها هي متشابهة

ليوضع المثلثان حتى يمس احدهما
الآخر ويكون الضلع ب س من الواحد
وي س من الاخر على استقامة واحدة

فالزاويتان ا ب س ا س ب معا اقل من قائمتين (ق ١٧ ك ١) و د ي س = ا س ب
فالزاويتان ا ب س د ي س معا اقل من قائمتين فاذا اخرج ب ا وي د يلتقيان
(فرع اول ق ٢٩ ك ١) فليخرجا حتى يلتقيا في ف. فلكون الزاوية ا ب س تعدل
د س ي فالخط ب ف يوازي س د (ق ٢٨ ك ١) ولكون ا س ب تعدل د ي س
فالخط ا س يوازي ف ي (ق ٢٨ ك ١) فالشكل ف ا س د متوازي الاضلاع و ا ف
يعدل س د و ا س يعدل ف د (ق ٢٤ ك ١) ولكون ا س يوازي ف ي احد اضلاع
المثلث ف ب ي ف نسبة ب ا : ا ف :: ب س : س ي (ق ٢ ك ٦) و ا ف = س د
فاذا ب ا : س د :: ب س : س ي (ق ٧ ك ٥) وبالمبادلة ب ا : ب س :: س د :
س ي (ق ١٦ ك ٥)

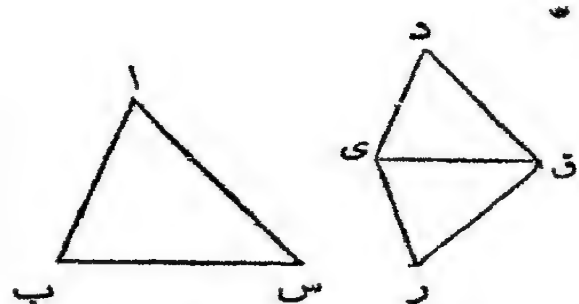
ولان س د يوازي ب ف فنسبة ب س : س ي :: ب ف : د ي (ق ٢ ك ٦)
ولكن ف د = ا س فنسبة ب س : س ي :: ا س : د ي وبالمبادلة ب س : ا س ::
س ي : د ي. وقد تبهرن ان ا ب : ب س :: د س : س ي وب س : س ا ::
س ي : د ي فبالمساواة ب ا : ا س :: س د : د ي

القضية الخامسة. ن

اذا كانت الاضلاع المحيطة بزوايا مثلثين متناسبة فالمثلثان متشابهان
وزواياها المتساوية تقابل اضلاعها المتناسبة

ليكن ا ب س د ي ق مثلثين اضلاعها متناسبة اي ا ب : ب س :: د ي :

ي ق وب س : س ا :: ي ق : ق د وب المساواة ب ا : س :: ي د : د ق فالثلث
 ا ب س يشبه الثلث د ي ق اي زواياها متساوية والزوايا المتساوية تقابل الاضلاع
 المتناسبة اي الزاوية ا ب س تعدل د ي ق وب س ا تعدل ي ق د وب ا س
 تعدل ي د ق



في النقطتين ي وق من الخط
 المستقيم ي ق ا جعل الزاوية ق ي ر
 تعدل ا ب س (ق ٢٢ ك ١) والزاوية
 ي ق ر تعدل ا س ب فالباقية
 ب ا س تعدل الباقية ي ر ق (فرع

٤ ق ٢٢ ك ١) وزوايا الثلث ا ب س تعدل زوايا الثلث ي ر ق والاضلاع التي
 تقابل الزوايا المتساوية هي متناسبة (ق ٤ ك ٦) اي

ا ب : ب س :: ر ي : ي ق ولكن بالمفروض

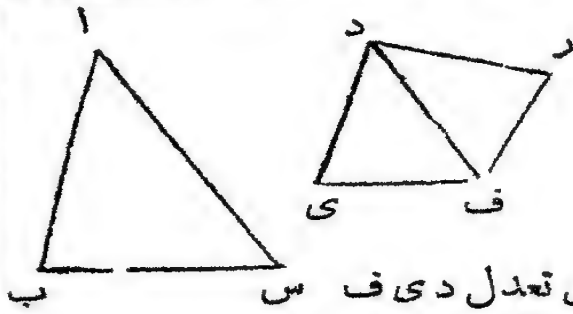
ا ب : ب س :: د ي : ي ق فاذا

د ي : ي ق :: ر ي : ي ق اي (ق ١١ ك ٥) د ي وري

بينهما وبين ي ق تناسب واحد فها متساويان (ق ٩ ك ٥) ولهذا السبب ايضاً
 د ق يعدل ق ر. ثم في المثلثين د ي ق ر ي ق الضلع د ي = ي ر وي ق مشترك
 بينهما والقاعدة د ق تعدل القاعدة ق ر فالزاوية د ي ق تعدل ر ي ق (ق ٨ ك ١)
 وبقيّة زوايا الواحد تعدل بقيّة زوايا الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية
 (ق ٤ ك ١) فالزاوية د ق ي = ر ق ي وي د ق = ي ر ق ولكن ر ي ق = ا ب س
 فاذا ا ب س = د ي ق ولهذا السبب ايضاً ا س ب = د ق ي والزاوية عند ا تعدل
 الزاوية عند د فزوايا الثلث ا ب س تعدل زوايا الثلث د ي ق

القضية السادسة. ن

في مثلثين اذا عدلت زاوية من الواحد زاوية من الآخر وكانت
 الاضلاع المحيطة بهما متناسبة فالمثلثان متشابهان والزوايا التي تقابل
 الاضلاع المتناسبة متساوية



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
ولتكن الزاويتان ب ا س ي د ف
متساويتين والاضلاع المحيطة بهما
متناسبة اي ب ا : س ي :: د ي د :

د ف فالمثلثان متشابهان والزاوية ا ب س تعدل د ي ف س
واس ب تعدل د ف ي

في النقطتين د وف من الخط المستقيم د ف ا جعل الزاوية ف د ر تعدل
احدى الزاويتين ب ا س او ي د ف (ق ٢٢ ك ١) واجعل الزاوية د ف ر تعدل
اس ب فالباقية ا ب س تعدل الباقية د ر ف (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) والمثلث ا ب س
يشبه المثلث د ر ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

ب ا : س ي :: د : د ف وبالمفروض

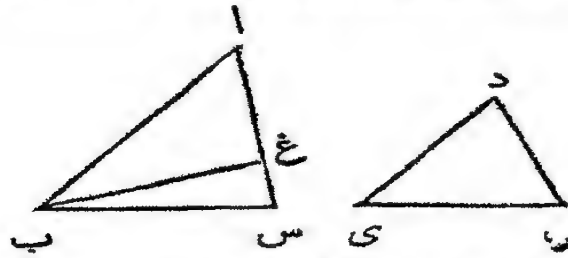
ب ا : س ي :: د : د ف فاذا (ق ١١ ك ٥)

ي د : د ف :: ر د : د ف اي ي د = د ر (ق ٩ ك ٥)

ود ف مشترك بين المثلثين ي د ف د ف فاضلعان ي د د ف يعدلان
الضلعين ر د د ف. ولكن الزاوية ي د ف = ر د ف فلقاعدة ي ف تعدل القاعدة
ر ف (ق ٤ ك ١) والمثلث ي د ف يعدل المثلث ر د ف وبقيّة الزوايا من الواحد
تعدل بقيّة الزوايا من الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزاوية د ف ر
تعدل د ف ي و د ر ف تعدل د ي ف. ولكن الزاوية د ف ر تعدل اس ب
فالزاوية اس ب تعدل د ف ي وبالمفروض ب ا س = ي د ف فالأخرى ا ب س
تعدل الأخرى د ي ف فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف

القضية السابعة. ن

في مثلثين اذا عدلت زاويةً من الواحد زاويةً من الآخر والاضلاع
المحيطة بزاويتين اخريين متناسبة فاذا كانت كل واحدة من بقيّة الزوايا
اصغر من قائمة او لم تكن اصغر من قائمة فالمثلثان متشابهان والزوايا
التي تليها الاضلاع متناسبة متساوية



ليكن اب س دى ف مثلثين
والزاوية ب اس فلتعدل ي د ف
وليكن الاضلاع المحيطة بزاويتي

اخرين اب س دى ف متناسبة اى
اب : ب س :: دى : ي ف واولا لتكن كل واحدة من الزاويتين الباقيتين عند
س وف اصغر من قائمة فالمثلث اب س يشبه المثلث دى ف اى الزاوية اب س
= دى ف والزاوية الباقية عند س تعدل الباقية عند ف

لانه ان لم تكن الزاويتان اب س دى ف متساويتين فاحداها اكبر من الاخرى
لتكن اب س اكبرها وعد النقطة ب في الخط المستقيم اب اجعل الزاوية اب غ
تعدل دى ف (ق ٢٢ ك ١) فحسب المفروض الزاوية ب اغ تعدل ي د ف وقد
جعلت اب غ = دى ف فالباقية اغ ب تعدل الباقية دى ف (فرع ٤ ق ٢٢
ك ١) وزوايا المثلث اب غ تعدل زوايا المثلث دى ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

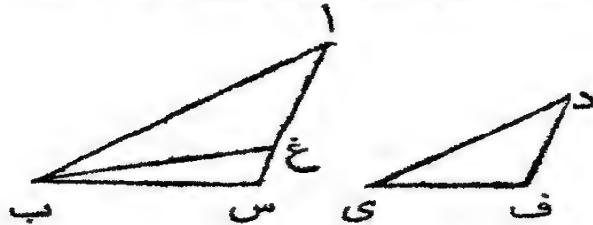
اب : ب غ :: دى : ي ف وبالمفروض

دى : ي ف :: اب : ب س فاذا (ق ١١ ك ٥)

اب : ب س :: اب : ب غ اى بين اب والخطين ب س ب غ

تناسب واحد فاذا ب س = ب غ (ق ٩ ك ٥) فالزاوية ب غ س = ب س غ
(ق ٥ ك ١) ولكن بالمفروض ب س غ اصغر من قائمة فتكون ب غ س اصغر من
قائمة فتكون الزاوية المتوالية اغ ب اعظم من قائمة (ق ١٢ ك ١) وقد تبهرن ان
اغ ب = دى ف فتكون دى ف اعظم من قائمة وقد فرض انها اصغر من قائمة
وذاك محال. فلا تكون الزاويتان اب س دى ف غير متساويتين اى هما متساويتان.
والزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالباقية عند س تعدل الباقية عند ف فالمثلث
اب س يشبه المثلث دى ف

ثم ان لم تكن كل واحدة من الزاويتين عند س وف اصغر من قائمة فالمثلث



اب س يشبه المثلث دى ف. لانه اذا

رسم الشكل كما تقدم يُبهرن ان ب س

= ب غ وب س غ = ب غ س .

وب س غ ليست اصغر من قائمة فلا

تكون ب غ س اصغر من قائمة وزاويتان من المثلث ب غ س معاً لا تكونان اصغر من قائمتين وذلك غير ممكن (ق ١٧ ك ١) فيُبرهن ان المثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف حسبما تقدم

القضية الثامنة. ن

في مثلث ذي قائمة اذا رُسم خط عمودي من القائمة الى القاعدة فالمثلثان الحادثان على جانبي العمود متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث الاول

ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س ومن النقطة ا يرسم ا د عموداً على القاعدة ب س فالمثلثان ا ب د ا س د متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث ا ب س. لأن الزاوية ب ا س تعدل الزاوية ا د ب لكون كل واحدة منهما قائمة والزاوية عند ب مشتركة بين المثلثين ا ب س ا ب د فالزاوية الاخرى ا س ب تعدل الاخرى ب ا د (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فالمثلثان ا ب س ا ب د متساويا الزوايا والاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ ك ٦) فالمثلثان متشابهان (حد ١ ك ٦) وهكذا يبرهن ان المثلث ا د س يشبه المثلث ا ب س فالمثلثان ا د س ا ب د يشبهان المثلث ا ب س فهما متشابهان

فرع. يتضح من هذه القضية ان العمود على القاعدة من قائمة مثلث ذي قائمة هو متناسب متوسط بين قسبي القاعدة وان كل ضلع هو متناسب متوسط بين القاعدة والقطعة من القاعدة التي تلي ذلك الضلع. لان في المثلثين ب د ا ا د س لنا (ق ٤ ك ٦)

ب د : د ا :: د ا : د س	وفي المثلثين ا ب س ب د ا لنا (ق ٤ ك ٦)
ب س : ب ا :: ب ا : ب د	وفي المثلثين ا ب س ا س د (ق ٤ ك ٦)
ب س : س ا :: س ا : س د	

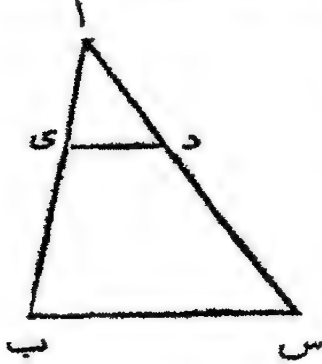
القضية التاسعة. ع

علينا ان نقطع من خطٍ مستقيم جزءاً معيناً اية جزءاً يعدُّه الخطُّ مراراً

مفروضة

ليكن اب الخط المستقيم المفروض. فعلياً ان نقطع منه جزءاً يعدُّه اب مراراً

مفروضة



من النقطة ا ارسم الخط المستقيم اس حتى يجعل مع اب زاوية وفي اس افرض نقطة مثل د حتى ان اس يعدُّ ا د مراراً تعدل المراس المفروضة للخط اب ان يعدَّ الجزء المطلوب قطعة. ارسم ب س ثم ارسم د ي حتى يوازي ب س

فلان ي د يوازي ب س احد اضلاع المثلث فنسبة س د : د ا :: ب ي : ي ا (ق ٢ ك ٦) وبالتراكيب (ق ١٨ ك ٥) س ا : ا د :: ب ا : ا ي. ولكن س ا هو مضروب من ا د فيكون ب ا ذات هذا المضروب من ا ي (ق ج ك ٥) اي يعدُّ ا ي كما ان اس يعدُّ ا د فاي جزء كان ا د من اس يكون ا ي ذات ذلك الجزء من اب فقد قطع من اب الجزء المفروض

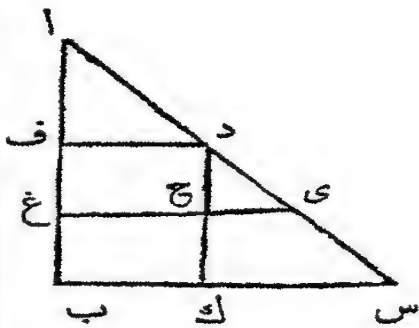
القضية العاشرة. ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً مفروضاً الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين

اقسام خط مستقيم مفروض

ليكن اب الخط المستقيم المفروض واس الخط المقسوم. علينا ان نقسم اب

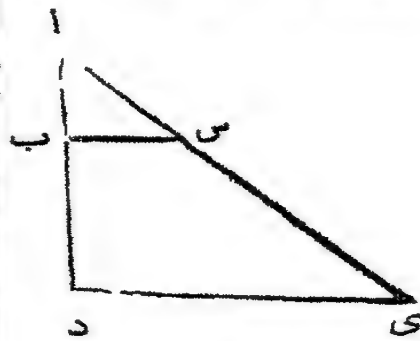
الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين اقسام الخط اس ليسقسم اس في د وي وليوضع اب اس حتى تحدث بينهما زاوية وارسم ب س. ثم من النقطتين د وي ارسم د ف ي غ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن د ارسم د ح ك حتى يوازي اب. فكل واحد من الشكاين د غ ح ب متوازي الاضلاع ود ح = ف غ



(ق ٢٤ ك ١) وح ك = غ ب . ولكون ح ي يوازي ك س احد اضلاع المثلث د ك س
فنسبة س ي : ي د :: ك ح : ح د (ق ٢ ك ٦) ولكن ك ح = ب غ وح د = غ ف
فتكون س ي : ي د :: ب غ : غ ف . ولكون ف د يوازي غ ي احد اضلاع المثلث
اغ ي فنسبة ي د : د ا :: غ ف : ف ا وقد تبهر ان س ي : ي د :: ب غ : غ ف
فقد انقسم الخط المستقيم ا ب مثل انقسام الخط ا س

القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نجد خطاً ثالثاً مناسباً لخطين مستقيمين مفروضين
ليكن ا ب ا س الخطين المستقيمين المفروضين فليوضعا حتى تحدث بينهما
زاوية . علينا ان نجد خطاً ثالثاً يناسبهما

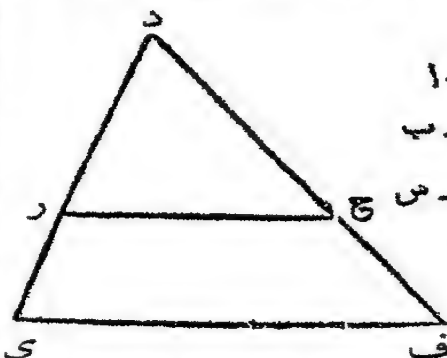


اخرج ا ب ا س الى د وى واجعل ب د
يعدل ا س . ا رسم ب س ثم من النقطة د ا رسم د ي
حتى يوازي ب س . فلان ب س يوازي د ي
ضلعاً من المثلث ا د ي فنسبة ا ب : ب د :: ا س
: س ي (ق ٢ ك ٦) ولكن ب د = ا س فنسبة

ا ب : ا س :: ا س : س ي فالخط س ي انما هو مناسب ثالث للخطين المفروضين

القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نجد مناسباً رابعاً لثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة
ليكن ا و ب و س الخطوط الثلاثة المستقيمة المفروضة . علينا ان نجد خطاً
رابعاً يناسبها



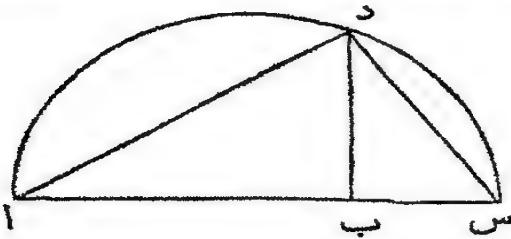
ا —————
ب —————
س —————

لفرض خطين
مستقيمين د ي د ف
بينهما زاوية ي د ف .
ومنهما افصل د ر حتى
يعدل ا و رى حتى

يعدل ب ود ح حتى يعدل س . ا رسم رح ثم ا رسم ي ف حتى يوازي رح (ق ٢١ ك ١) . فلان رح يوازي ي ف احد اضلاع المثلث د ي ف فنسبة در : ري :: دح : ح ف (ق ٢ ك ٦) ولكن در = ا و ري = ب ودح = س فنسبة ا : ب :: س : ح ف . فالخط ح ف انما هو مناسب رابع للخطوط الثلاثة المفروضة

القضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نجد متناسبا متوسطا بين خطين مستقيمين مفروضين
ليكن ا ب ب س الخطين المستقيمين المفروضين . علينا ان نجد متناسبا



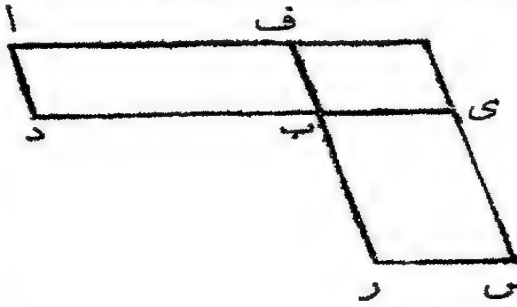
متوسطا بينهما . اجعل ا ب ب س على استقامة واحدة وعلى ا س ا رسم نصف دائرة ا د س . ومن النقطة ب ا رسم ب د عمودا على ا س (ق ١١ ك ١) ثم ا رسم ا د و د س

لان ا د س قائمة لكونها في نصف دائرة (ق ٢١ ك ٢) وقد رسم د ب عمودا من القائمة على القاعدة فالخط د ب انما هو متناسب متوسط بين قسبي القاعدة (فرع ق ٨ ك ٦) فقد وجدنا د ب متناسبا متوسطا بين الخطين المفروضين ا ب ب س

القضية الرابعة عشرة . ن

في شكلين متوازيي الاضلاع متساويين اذا عدلت زاوية من الواحد زاوية من الآخر تكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ . واذا عدلت زاوية من شكل متوازي الاضلاع زاوية من اخر متوازي الاضلاع وكانت الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ فالشكلان متساويان

ليكن ا ب ب س شكلين متوازيي الاضلاع متساويين لهما الزاويتان عند ب



متساويتان وليكن الضلعان د ب ب ي
على استقامة واحدة فيكون الضلعان رب
ب ف ايضاً على استقامة واحدة (ق ١٤ ك)
فاضلاع الشكليين ا ب ب س
المحيطة بالزاويتين المتساويتين هي متناسبة
بالتكافؤ اي نسبة د ب : ب ي :: رب : ب ف

ثم الشكل ف ي . فلان الشكليين ا ب ب س متساويان وف ي شكل
اخر متوازي الاضلاع فلنا ا ب : ف ي :: ب س : ف ي (ق ٧ ك ه)
والشكلاين ا ب ف ي لهما علو واحد فلنا

ا ب : ف ي :: د ب : ب ي (ق ١ ك ٦) وايضاً

ب س : ف ي :: رب : ب ف (ق ١ ك ٦) فاذا

د ب : ب ي :: رب : ب ف (ق ١ ك ه) فاضلاع

الشكليين ا ب ب س المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع متناسبة بالتكافؤ اي د ب : ب ي :: رب : ب ف

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب س . لان د ب : ب ي :: رب : ب ف وايضاً

د ب : ب ي :: ا ب : ف ي وايضاً رب : ب ف :: ب س : ف ي فاذا

ا ب : ف ي :: ب س : ف ي (ق ١ ك ه)

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب س (ق ٩ ك ه)

القضية الخامسة عشرة . ن

في مثلثين متساويين لهما زاوية من الواحد تعدل زاوية من الآخر تكون

الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ . واذا عدلت

زاوية من الواحد زاوية من الآخر وكانت الاضلاع المحيطة بهاتين

الزاويتين متناسبة بالتكافؤ فالمثلثان متساويان

ليكن ا ب س ا د ي مثلثين متساويين والزاوية ب ا س فلتعدل الزاوية

من النقطة ا رسم اغ عموداً على اب
ومن س ارسم س ح عموداً على س د واجعل
اغ يعدل ف وس ح يعدل ي ونم
الشكلين المتوازيين الاضلاع غ ب ح د
فلكون اب : س د :: ي : ف وي = س ح
وف = اغ فنسبة اب : س د :: س ح : اغ (ق ٧ ك ٥) فاضلاع الشكلين
المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ فالشكل ح د يعدل الشكل غ ب
(ق ١٤ ك ٦) وب غ هو مسطح اب في ف لأن اغ = ف وح د مسطح س د في ي لأن
س ح = ي فالقائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي. ثم اذا فرض
ان القائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي فالخطوط الاربعة
متناسبة اي اب : س د :: ي : ف. ثم الشكلين كما تقدم. فلان القائم الزوايا اب
× ف = القائم الزوايا س د × ي والقائم الزوايا ب غ هو مسطح اب × ف لان اغ
= ف والقائم الزوايا ح د هو مسطح س د × ي لان س ح = ي فالقائم الزوايا
ب غ يعدل القائم الزوايا د ح وزواياها متساوية ايضاً فالاضلاع المحيطة بالزوايا
المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ (ق ١٤ ك ٦) فنسبة اب : س د :: س ح : اغ
وس ح = ي واغ = ف فنسبة اب : س د :: ي : ف

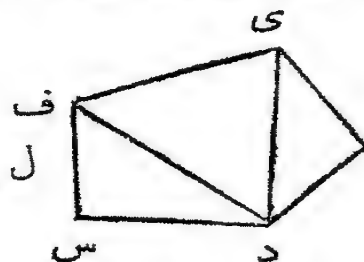
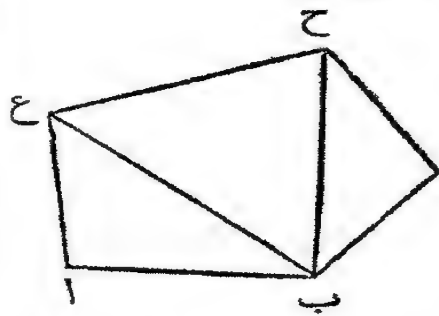
القضية السابعة عشرة. ن

اذا كانت ثلاثة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا الذي هو مسطح
الطرفين يعدل مربع الوسط. والقائم الزوايا الذي هو مسطح
الطرفين اذا عدل مربع الوسط فالخطوط الثلاثة متناسبة
ليكن اوب وس ثلاثة خطوط متناسبة اي ا : ب :: ب : س فالقائم الزوايا
ا × س يعدل مربع ب. افرض خطاً اخر يعدل ب
مثل د فلكون ا : ب :: ب : س وقد فرض ان ب
يعدل د فنسبة ا : ب :: د : س (ق ٧ ك ٥) واذا
كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم

الزوايا مسطح الوسطين (ق ١٦ ك ٦) فالقائم الزوايا \times س يعدل القائم الزوايا
 \times ب \times د والقائم الزوايا ب \times د يعدل مربع ب لآ \times د يعدل ب فالقائم الزوايا
 \times س $=$ ب \times ب. ثم اذا قُرِض ان \times س $=$ ب تكون نسبة ا : ب :: ب : س
 ليفرض كما تقدم ان \times د يعدل ب فلان القائم الزوايا \times س $=$ ب \times د $=$ ب
 فالقائم الزوايا \times س $=$ ب \times د واذا كان القائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم
 الزوايا مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة (ق ١٦ ك ٦) ا : ب :: ب : د :
 س ولكن ب $=$ د فتكون ا : ب :: ب : س

القضية الثامنة عشرة. ع

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً ذا اضلاع مستقيمة
 شبيهاً بشكل مفروض ذي اضلاع مستقيمة ومثله في الوضع
 ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس د ي ف الشكل المفروض ذا اضلاع
 مستقيمة. علينا ان نرسم على ا ب مثل س د ي ف شكلاً ووضعاً



ارسم د ف وعلى
 النقطتين ا وب من
 الخط المستقيم ا ب
 اجعل الزاوية ب ا غ

تعديل د س ف (ق ٢٣ ك ١) والزاوية ا ب غ تعديل

س د ف فالزاوية الاخرى س ف د تعديل ا غ ب (ق ٢٣ ك ١) فالمثلث
 ف س د يشبه المثلث غ ا ب. ثم عند النقطتين ب و غ من الخط المستقيم ب و غ
 اجعل الزاوية ب غ ح تعديل د ف ي (ق ٢٣ ك ١) والزاوية غ ب ح تعديل
 ف د ي فالزاوية الاخرى ف ي د تعديل ا غ ب والمثلث ف د ي يشبه
 المثلث غ ب ح. فلان الزاوية ا غ ب تعديل س ف د والزاوية ب غ ح تعديل د ف ي
 فكل الزاوية ا غ ح تعديل الكل س ف ي. وهكذا يبرهن ايضاً ان ا ب ح تعديل
 س د ي. ولكن الزاوية عند ا تعديل الزاوية عند س والزاوية غ ب ح تعديل ف ي د
 فالشكل ا ب ح غ يشبه الشكل س د ي ف. واضلاع الشكلين المحيطة بالزوايا

المتساوية متناسبة. لأن المثلثين غ ا ب ف س د متساوي الزوايا فنسبة ب ا : غ : د س : س ف (ق ٤ ك ٦) وهكذا أيضاً

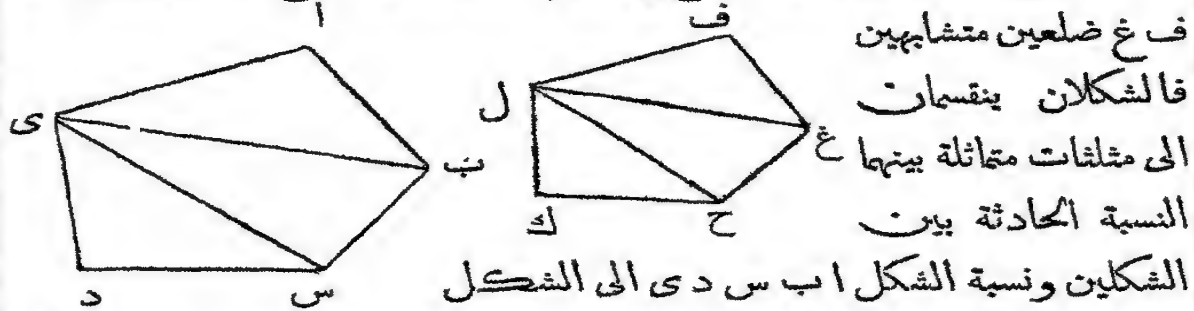
اغ : غ ب :: س ف : ف د وفي المثلثين المتشابهين ب غ ح د ف ي
غ ب : غ ح :: ف د : ف ي في المساواة (ق ٢٢ ك ٥)
اغ : غ ح :: س ف : ف ي وهكذا يبرهن ان
اب : ب ح :: س د : د ي وايضاً (ق ٤ ك ٦)
غ ح : ح ب :: ف ي : ي د فالشكلان متساوي الزوايا والاضلاع
المحيطة بالزوايا المتساوية منها متناسبة فالشكلان متشابهان (حد ١ ك ٦)

ثم اذا فرض ان يرسم على ا ب شكلاً يشبه س د ك ي ف . ارسم د ي وعلى
الخط المفروض ا ب ارسم الشكل ا ب ح غ حسبما تقدم حتى يشبه س د ي ف وعند
النقطتين ب و ح من الخط المستقيم ب ح اجعل الزاوية ح ب ل تعدل ي د ك
والزاوية ب ح ل تعدل د ي ك فالزاوية الاخرى عند ل تعدل الاخرى عند ك .
ولان الشكلين ا ب ح غ س د ي ف متشابهان فالزاوية غ ح ب تعدل ف ي د
وب ح ل تعدل د ي ك فالكل غ ح ل يعدل الكل ف ي ك . وهكذا يبرهن ان
ا ب ل تعدل س د ك والشكل ذو الخمسة اضلاع ا غ ح ل ب يعدل الشكل ذا
الخمسة اضلاع س ف ا ي ك د . ولأن المثلثين ا غ ح ب س ف ي د متساوي
الزوايا فنسبة غ ح : ح ب :: ف ي : ي د وايضاً ح ب : ح ل :: ي د : ي ك
(ق ٤ ك ٦) في المساواة (ق ٢٢ ك ٥) غ ح : ح ل :: ف ي : ي ك . ولهذا السبب
ايضاً ا ب : ب ل :: س د : د ك وب ل : ل ح :: د ك : ك ي (ق ٤ ك ٦) لأن
المثلثين ب ل ح د ك ي متساوي الزوايا . فالشكلان ا ب ل ح غ س د ك ي ف
متساوي الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية منها متناسبة فهما متشابهان . وعلى هذه
الكيفية يرسم على خط مستقيم مفروض شكل ذو ستة اضلاع فاكثر شبيه بشكل
مفروض

القضية التاسعة عشرة . ن

نسبة المثلثات المتشابهة بعضها الى بعض كبرعات اضلاعها المتشابهة

ومتشابهة بينها نفس النسبة الحادثة بين الاشكال الاصلية. ونسبة
الاشكال الاصلية بعضها الى بعض هي كمربعات اضلاعها المتشابهة
ليكن $ا ب س د ي$ $ف غ ح ك ل$ شكلين لهما اضلاع كثيرة وليكن $ا ب$



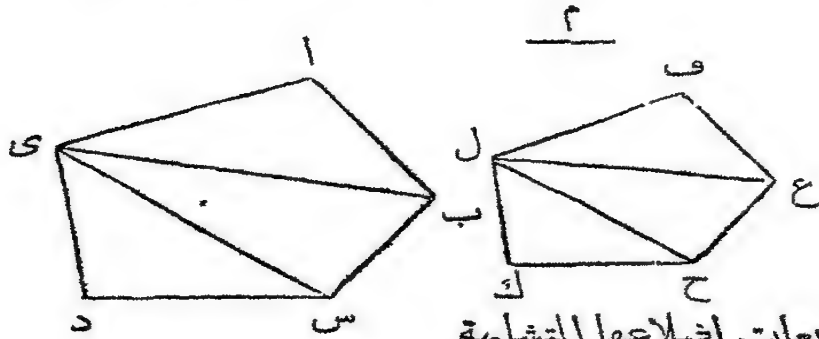
ف غ ح ك ل كنسبة مربع $ا ب$ الى مربع $ف غ$. ارسم $ب ي$ $س ي$ $غ ل$ $ح ل$.
فلكون الشكل $ا ب س د ي$ يشبه الشكل $ف غ ح ك ل$ فالزاوية $ب ا ي$ تعدل
الزاوية $غ ف ل$ (حد $ا ك ٦$) وب $ا ي :: غ ف :: ف ل$ فالمثلثان $ا ب ي$
 $ف غ ل$ لهما زاوية من الواحد تعدل زاوية من الاخر والاضلاع المحيطة بالزاويتين
المتساويتين متناسبة فزوايا المثلث $ا ب ي$ تعدل زوايا المثلث $ف غ ل$ (ق $٦ ك ٦$)
فالمثلثان متشابهان (ق $٤ ك ٦$). ولكون الشكلين متشابهين فالزاوية $ا ب س$
تعدل الزاوية $ف غ ح$ (حد $ا ك ٦$) فالزاوية الباقية $ي ب س$ تعدل الباقية $ل غ ح$
ولكون المثلثين $ا ب ي$ $ف غ ل$ متشابهين فنسبة $ي ب :: ل غ :: غ ف$
ولأن الشكلين متشابهان فنسبة $ا ب :: ب س :: ف غ :: غ ح$ (حد $ا ك ٦$) فيالمساواة
(ق $٢٢ ك ٥$) $ي ب :: ب س :: ل غ :: غ ح$ فالضلعان المحيطان بالزاويتين المتساويتين
متناسبان وزوايا المثلث $ي ب س$ تعدل زوايا المثلث $ل غ ح$ (ق $٦ ك ٦$) فهما
متشابهان (ق $٤ ك ٦$) وهكذا يبرهن ان المثلثين $ي س د ل ح ك$ متشابهان
فقد انقسم الشكلان الى مثلثات متماثلة متشابهة

ونسبة هذه المثلثات بعضها الى بعض كنسبة الاشكال بعضها الى بعض
فالسوابق هي المثلثات $ا ب ي$ $ي ب س$ $س ي د$ والتوالي هي المثلثات $ف غ ل$
 $ل غ ح ك$. ونسبة الشكل $ا ب س د ي$ الى الشكل $ف غ ح ك ل$ كنسبة
مربع $ا ب$ الى مربع الضلع المشابه $ف غ$
لأن المثلث $ا ب ي$ يشبه المثلث $ف غ ل$ فنسبة $ا ب ي$ الى $ف غ ل$ كنسبة

مربع الضلع ب ي الى مربع الضلع غ ل (ق ١٩ ك ٦) وهكذا المثلث ب ي س :
المثلث غ ل ح :: مربع ب ي : مربع غ ل فنسبة ا ب ي : ف غ ل :: ب ي س :
غ ل ح (ق ١١ ك ٥) وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان

ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ح ك

وقد تبرهن ان ي ب س : ل غ ح :: ا ب ي : ف غ ل . فنسبة ا ب ي :
ف غ ل :: ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ح ك اي نسبة احد السوايق الى احد
الترالي ككل السوايق الى كل التوالي (ق ١٢ ك ٥) فالمثلث ا ب ي : المثلث ف غ ل
:: الشكل ا ب س د ي : الشكل ف غ ح ك ل ونسبة ا ب ي : ف غ ل :: ا ب :
ف غ فنسبة الشكل ا ب س د ي : ف غ ح ك ل :: مربع ا ب : مربع ف غ



فرع اول . هكذا
يبرهن في اشكال
ذات اربعة او ستة
اضلاع فاكثر ان نسبة

بعضها الى بعض كنسبة مربعات اضلاعها المتشابهة

فرع ثان . اذا استقيم متناسب بالثلاثين المضامين المتشابهين ا ب ف غ مثل
خط م اي ا ب : ف غ :: ف ع : م فلان الشكل على ا ب : الشكل على ف غ ::
مربع ا ب : مربع ف غ فنسبة ا ب : م :: الشكل على ا ب : الشكل على ف غ حسبما
نقدم في المثلثات (فرع ق ١٩ ك ٦) فاذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة تكون نسبة
الاول الى الثالث كنسبة شكل على الاول الى شكل منله على الثاني

فرع ثالث . المربعات متشابهة . ونسبة مربع الى مربع كنسبة ضلع من
الواحد الى مربع ضلع من الاخر . وهكذا في كل الاشكال المتشابهة ذات اضلاع
مستقيمة اي احدها الى الاخر كمربعات اضلاعها المتشابهة

تعاينة . شكلان مركبان من مثلثات متماثلة متشابهة هما متشابهان . فبمشابهة
المثلثين لنا ي ا ب = ل ف غ ا ب ي - ف غ ل ي ب س = ل غ ح فاذا
ا ب س = ف غ ح وب س د = ف غ ح ك وهلم جرا وايضا ي ا : ل ف :: ا ب :

ف غ :: ي ث : ل غ :: ب س : غ ح وهلم جرا فالزوايا والاضلاع متناسبة
فالشكلان متشابهان

القضية الحادية والعشرون

اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة بشكل واحد ذي اضلاع
مستقيمة هي متشابهة بعضها لبعض

ليكن ا وب شكلين مستقيمي الاضلاع شبيهين بشكل آخر ذي اضلاع

مستقيمة مثل س فهما متشابهان

لان ا يشبه س فهما متساويا

الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا

المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦)

ولان ب يشبه س فهما متساويا

الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦) فزوايا كل واحد

من الشكلين ا وب تعدل زوايا الشكل س والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية

منهما متناسبة فالشكلان متساويا الزوايا (حد ا ك ١) واضلاعهما الموائية لهذه الزوايا

متناسبة (ق ا ك ٥) فالشكل ا يشبه الشكل ب (حد ا ك ٦)

القضية الثانية والعشرون

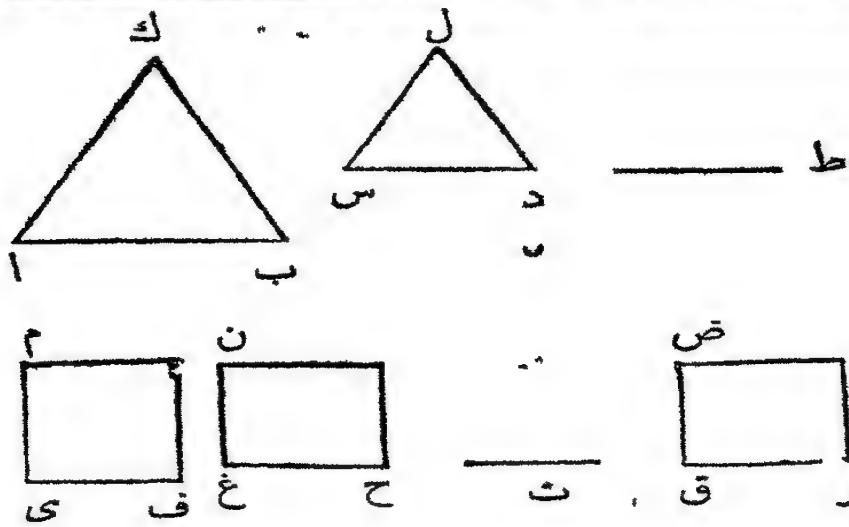
اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالاشكال المتشابهة ذات

الاضلاع المستقيمة المبنية على هذه الخطوط تكون متناسبة ايضاً. واذا

كانت هذه الاشكال متناسبة فالخطوط التي بُنيت عليها تكون

متناسبة ايضاً

ليكن ا ب س د ي ف غ ح اربعة خطوط مستقيمة متناسبة اي ا ب : س د



ي: ف: غ ح وليرسم
على ا ب وس د
شكلان متشابهان
لهما اضلاع مستقيمة
ك ا ب ل س د
وليبرسم على ي ف
غ ح شكلان
متشابهان لهما
اضلاع مستقيمة

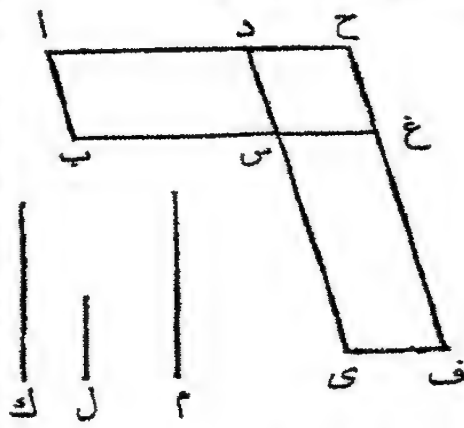
م ف ن ح فتكون نسبة ك ا ب : ل س د :: م ف : ن ح
ليكن ط خطاً مستقيماً ومتناسباً ثالثاً للخطين ا ب س د والخط المستقيم ت
متناسباً ثالثاً للخطين ي ف غ ح (ق ١١ ك ٦) فلكون
ا ب : س د :: ي ف : غ ح وايضاً
س د : ط :: غ ح : ت (ق ١١ ك ٥) فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)
ا ب : ط :: ي ف : ت ولكن
ا ب : ط :: ك ا ب : ل س د (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) فاذا
ي ف : ت :: م ف : ن ح فيكون
ك ا ب : ل س د :: م ف : ن ح (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦)
ثم اذا فرض ان نسبة ك ا ب : ل س د :: م ف : ن ح تكون نسبة ا ب : س د ::
ي ف : غ ح

اجعل نسبة ا ب : س د :: ي ف : ق ر (ق ١٢ ك ٦) وعلى ق ر ا رسم
الشكل المستقيم الاضلاع ص ر حتى يشبه م ف ا و ن ح شكلاً ووضعاً (ق ١٨ ك ٦)
فلان ا ب : س د :: ي ف : ق ر وقد رُسم على ا ب وس د شكلان متشابهان
شكلاً ووضعاً ك ا ب : ل س د وهكذا على ي ف ق ر قد رُسم شكلان متشابهان
شكلاً ووضعاً م ف : و ص ر فتكون نسبة ك ا ب : ل س د :: م ف : و ص ر
وبالمفروض ك ا ب : ل س د :: م ف : ن ح فالشكل المستقيم الاضلاع م ف ل
تناسب واحد للشكلين ن ح ص ر فهما متساويان (ق ٩ ك ٥) وهما متشابهان

ايضاً شكلاً ووضعاً فالخط غ ح يعدل المخط ق ر ولان اب : س د :: ي ف : ق ر
وقر = غ ح فنكون نسبة اب : س د :: ي ف : غ ح

القضية الثالثة والعشرون

تناسب اشكال متوازية الاضلاع متساوية الزوايا بعضها الى بعض
هو التناسب المركب من تناسبات اضلاعها



ليكن اس س ف شكلين متوازيين
الاضلاع. والزاوية ب س د فلتعدل الزاوية
ي س غ فتناسب اس الى س ف هو
التناسب المركب من تناسبات اضلاعها.
ليوضع ب س وس غ على استقامة واحدة
فيكون ي س س د ايضاً على استقامة واحدة
(ق ١٤ ك ١) ثم الشكل د غ. ثم عين خطأ

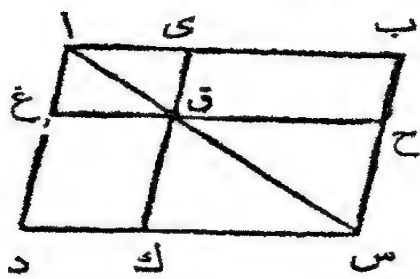
مستقيماً مثل ك واجعل تناسب ب س : س ع :: ك : ل (ق ١٢ ك ٦) وتناسب
د س : س ي :: ل : م فتناسبات ك الى ل ول الى م هي مثل تناسبات الاضلاع
اي تناسب ب س الى س غ وتناسب د س الى س ي. ولكن تناسب ك الى م هو
المركب من تناسب ك الى ل مع تناسب ل الى م (حد ١٠ ك ٥) فتناسب ك الى م
هو المركب من تناسبات اضلاع الشكلين. ولان ب س : س غ :: اس : س ح
(ق ١ ك ٦) وب س : س غ :: ك : ل فيكون ك : ل :: اس : س ح (ق ١١ ك ٥)
ولان د س : س ي :: س ح : س ف ود س : س ي :: ل : م فيكون ل : م ::
س ح : س ف (ق ١١ ك ٥)

وقد تبهرن ان ك : ل :: اس : س ح وان ل : م :: س ح : س ف فهما مساواة
(ق ٢٢ ك ٥) ك : م :: اس : س ف ولكن تناسب ك الى م هو المركب من
تناسبات اضلاع الشكلين كما تقدم. فتناسب اس الى س ف هو المركب من اضلاعها
فرع اول. شكلان قائما الزوايا احدهما الى الاخر كحاصل قاعدتيهما في علوهما
فرع ثان. مساحة شكل متوازي الاضلاع تعدل مسطح القاعدة في العلو

فرع ثالث. مساحة مثلث تعدل مسطح قاعدته في نصف علوه

القضية الرابعة والعشرون

الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر شكل متوازي الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض وللشكل كله



ليكن اب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس قطره وى غ ح ك شكلين متوازي الاضلاع على جانبي القطر فهما متشابهان ويشبهان كل الشكل اب س د

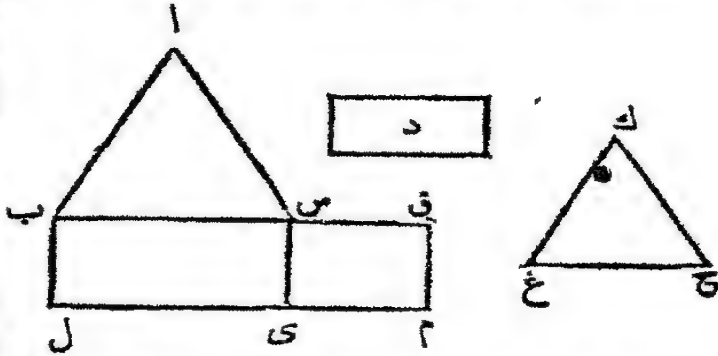
لان د س يوازي غ ق والزوايا ا د س تعدل

الزاوية اغ ق (ق ٢٩ ك ١) ولان ب س يوازي ي ق والزوايا اب س تعدل الزاوية اى ق وكل واحدة من الزاويتين ب س د ي ق غ تعدل المقابلة د اب (ق ٢٤ ك ١) فهما متساويتان والشكلان اب س د اى ق غ متساويا الزوايا ولان الزاوية اب س تعدل الزاوية اى ق والزوايا س اب مشتركة بين المثلثين ب ا س ي ا ق فهما متساويا الزوايا و اب : ب س :: اى : ي ق (ق ٤ ك ٦) ولكون الاضلاع المتقابلة من شكل متوازي الاضلاع هي متساوية (ق ٢٤ ك ١) يكون اب : ا د :: اى : اغ (ق ٧ ك ٥) و د س : س ب :: غ ق : ق ي و س د : د ا :: ق غ : غ ا فاضلاع الشكلين اب س د اى ق غ المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة فهما متشابهان (حد ١ ك ٦) ولهذا السبب ايضا الشكل اب س د يشابه الشكل ق ح س ك فكل واحد من الشكلين غ ي ك ح يشبه د ب والاشكال المستقيمة الاضلاع التي تشبه شكلاً واحداً مستقيم الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض (ق ٢١ ك ٦) فالشكل غ ي يشبه الشكل ك ح

القضية الخامسة والعشرون

علينا ان نرسم شكلاً مستقيم الاضلاع حتى يشبه شكلاً مفروضاً مستقيم الاضلاع ويعدل شكلاً اخر مفروضاً مستقيم الاضلاع

ليكن اب س شكلاً مفروضاً مستقيماً الاضلاع ود شكلاً اخر مفروضاً مستقيماً



الاضلاع. علينا ان نرسم
شكلاً مستقيماً الاضلاع
يعدل د ويشبه اب س
ارسم الشكل
المنازلي الاضلاع
ب ي على الخط المستقيم

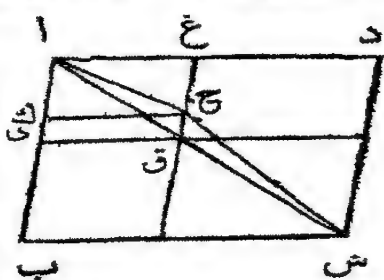
ب س حتى يعدل اب س (فرع ق ٤٥ ك ١) وعلى س ي ارسم شكلاً منازلياً
الاضلاع س م حتى يعدل د (فرع ق ٤٥ ك ١) واجعل الزاوية ق س ي منه تعدل
الزاوية س ب ل فيكون ب س وق س على استقامة واحدة ول ي و ي م كذلك
(ق ٢٩ ك ١ او ق ١٤ ك ١) استعلم متناسباً متوسطاً بين ب س وس ق مثل غ ح
(ق ١٢ ك ٦) وارسم على غ ح شكلاً مستقيماً الاضلاع ك غ ح حتى يشبه اب س
شكلاً ووضعاً (ق ١٨ ك ٦)

فلكون نسبة ب س : غ ح :: غ ح : س ق فالشكل اب س : ك غ ح ::
ب س : س ق (فرع ثانٍ ق ٢٠ ك ٦) وب س : س ق :: ب ي : س م (ق ١ ك ٦)
فتكون نسبة اب س : ك غ ح :: ب ي : س م (ق ١١ ك ٥) والشكل اب س
يعدل ب ي فالشكل ك غ ح يعدل س م (ق ١٤ ك ٥) والشكل س م يعدل د
فالشكل ك غ ح يعدل د ايضاً وهو يشبه الشكل اب س وذلك ما كان علينا ان
نعملة

القضية السادسة والعشرون . ن

شكلان متوازيان الاضلاع متشابهان اذا كان لهما زاوية مشتركة وتشابهان
وضعاً فهما على جانبي قطري واحد

ليكن اب س د ا ي ق غ شكلين متوازيين الاضلاع متشابهين شكلاً ووضعاً



ولتكن الزاوية د ا ب مشتركة بينهما فالشكلان على جانبي قطر واحد

والا فليكن ا ح س قطر الشكل ب د و ا ق قطر الشكل س غ والخط غ ق فليقطع ا ح س في النقطة ح ومن ح ارسم ح ك حتى يوازي ا د او

ب س. فالشكلان ا ب س د ا ك ح غ متشابهان لانها على جانبي قطر واحد (ق ٢٤ ك ٦) ود ا : ا ب :: غ ا : ا ك (ح د ا ك ٦) وقد فُرض ان ا ب س د ا ي ق غ متشابهان فتكون نسبة د ا : ا ب :: غ ا : ا ي فتكون نسبة غ ا : ا ي :: غ ا : ا ك (ق ١١ ك ٥) فاذا ا ك = ا ي (ق ٩ ك ٥) اية الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يكون ا ك ح غ ا ب س د على جانبي قطر واحد فبالضرورة يكون ا ب س د ا ي ق غ على جانبي قطر واحد

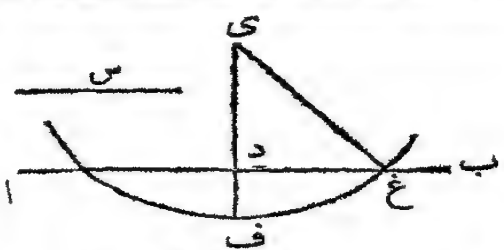
القضية السابعة والعشرون

من جميع الاشكال القائمة الزوايا التي تحيط بها اقسام خط مستقيم فاعظمها مربع نصف الخط

ليكن ا ب خطاً مستقيماً وليتصف في س ولتكن د اية نقطة كانت فيه فالمرجع على ا س هو اعظم من القائم الزوايا ا د ب د ب ب د س ا فلكون الخط المستقيم ا ب قد انقسم الى قسمين متساويين في س وغير متساويين في د فالقائم الزوايا ا د ب د ب مع مربع س د يعدل مربع ا س (ق ١٥ ك ٢) فاذا مربع ا س هو اكبر من القائم الزوايا ا د ب د ب

القضية الثامنة والعشرون

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً مفروضاً حتى يعدل القائم الزوايا مسطحاً قسمة مساحة مفروضة ولا تكون تلك المساحة اعظم من مربع نصف الخط

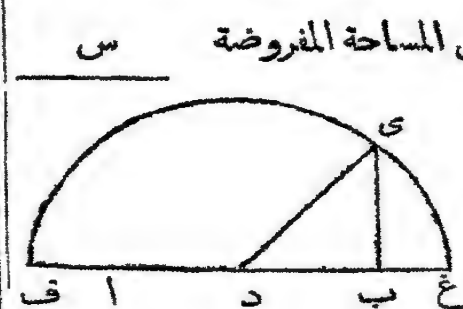


ليكن اب الخط المستقيم المفروض
ومربع س المساحة المفروضة. علينا ان
نقسم اب الى قسمين مستطهما يعدل مربع
س ولا يكون اعظم من مربع نصف اب

نصف اب في د فمربع اد اذا عدل مربع س فهو المطلوب والا فيكون اد
اعظم من س حسب المفروض. ارسم دي عموداً على اب حتى يعدل س. اخرج
ي د الى ف واجعل ي ف يعدل اد او دب. ومن المركز ي والبعدي ف ارسم
دائرة تقطع اب في غ وارسم ي غ. فلكون اب قد انقسم الى قسمين متساويين في
د وغير متساويين في غ فالقائم الزوايا ا غ \times غ ب + د غ = د ب (ق ٥ ك ٢) =
ي غ ولكن ي د + د غ = ي غ (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا غ \times غ ب + د غ = ي د
+ د غ اطرح د غ فالباقي ا غ \times غ ب = ي د وي د = س فالقائم الزوايا ا غ \times
غ ب = س وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية التاسعة والعشرون ع

علينا ان نخرج خطاً مستقيماً مفروضاً حتى ان القائم الزوايا مسطح الخط
مع ما زيد اليه في الجزء المزيد يعدل مساحة مفروضة



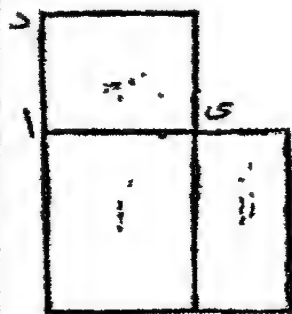
ليكن اب الخط المستقيم المفروض ومربع س المساحة المفروضة
نصف اب في د وارسم ب ي عموداً عليه
واجعل ب ي يعدل س. ارسم ي د وعلى المركز
د والبعدي د ارسم دائرة تقطع اب بعد اخراجه
في غ

فلكون اب قد تنصّف في د واخرج الى غ (ق ٦ ك ٢) فالقائم الزوايا ا غ \times
غ ب + د ب = د غ = د ي. ولكن د ي (ق ٤٧ ك ١) = د ب + ب ي فالقائم
الزوايا ا غ \times غ ب + ب د = ب د + ب ي وا غ \times غ ب = ب ي وب ي =
س فاذا ا غ \times غ ب = س وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثلثون ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً حتى يكون احد القسمين متناسباً متوسطاً بين الخط كله والقسم الاخر

ليكن ab الخط المستقيم المفروض. ارسم على ab مربعاً (ق ٤٦ ك ١) b s واخرج s a الى d حتى ان القائم الزوايا s d a يعدل المربع s b (ق ٢٩ ك ٦) اجعل a i يعدل a d وتم القائم الزوايا d f i s d s a i او d s a d s a i فلكون s d a s b فالشكل d f s b اطرح الجزء المشترك s i فالباقي d i = الباقي b f وب f هو القائم الزوايا f i s b او a b s b i .



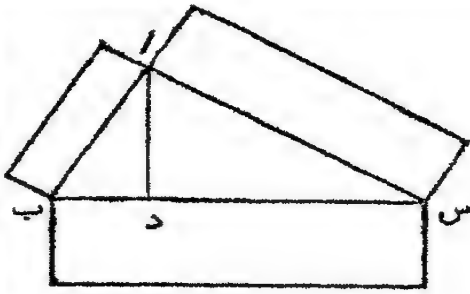
و d i هو المربع على a i فالخط a i هو متناسب متوسط بين a b وب i (ق ١٧ ك ٦) اي a b : a i :: a i : b i وب i هو اعظم من a i فيكون a i اعظم من b (ق ١٤ ك ٥) فقد انقسم الخط ab على نسبة متوسطة (حد ٢ ك ٦)

طريقة اخرى

ليكن ab الخط المفروض. اقسم ab في s حتى ان القائم الزوايا a b s b s يعدل a s (ق ١١ ك ٢) فلكون a b s b s a تكون نسبة a b : a s :: a s : b s (ق ١٧ ك ٦) اي a s متناسب متوسط بين a b و s b (حد ٢ ك ٦)

القضية الحادية والثلاثون ن

في كل مثلث ذي قائمة ذوا اضلاع المستقيمة المرسوم على الضلع الذي يقابل القائمة يعدل الشكليين المتشابهين به هيئة ووضعاً المرسومين على الضلعين المحيطين بالقائمة

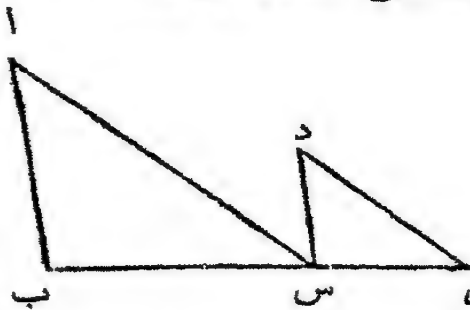


ليكن $اب س$ مثلثا ذا قائمة $ب ا س$
 فذو الاضلاع المستقيمة المرسوم على $ب س$
 يعدل الشكلين المتشابهين به هيئة ووضعاً
 المرسومين على $ب ا و ا س$
 ارسم العمود $ا د$. فلان $ا د$ قد رُسم

عموداً من القائمة على القاعدة فالثلثان $ا د ب$ $ا د س$ متشابهان ويشبهان كل المثلث
 $ا ب س$ ايضاً (ق ٨ ك ٦) ونسبة $س ب : ب ا :: ب ا : ب د$ (ق ٤ ك ٦)
 ولكون هذه الخطوط الثلاثة المستقيمة متناسبة تكون نسبة الاول الى الثالث
 كنسبة شكل على الاول الى شكل مثله هيئة ووضعاً على الثاني (فرع ثان ق ٢٠ ك ٦)
 فنسبة $س ب : ب ا :: ب ا : ب د$ شكل على $س ب$: مثله هيئة ووضعاً على $ب ا$. وبالقلب
 (ق ب ك ٥) $د ب : ب س :: الشكل على ب ا : مثله على ب س$. وهكذا ايضاً
 $د س : س ب :: الشكل على س ا : مثله على س ب$. فاذا $ب د + د س : ب س ::$
 $الشكل على ب ا + الشكل على ا س : الشكل على ب س$ (ق ٢٤ ك ٥)
 فالشكلان على $ب ا و ا س$ معاً يعدلان الشكل على $ب س$ وهي اشكال متشابهة

القضية الثانية والثلثون.

مثلثان ضلعان من الواحد مناسبان لضلعين من الاخر اذا وضعت
 زاوية من الواحد بملامسة زاوية من الاخر حتى تكون اضلعها المتشابهة
 متوازية يكون الضلعان الاخران على استقامة واحدة



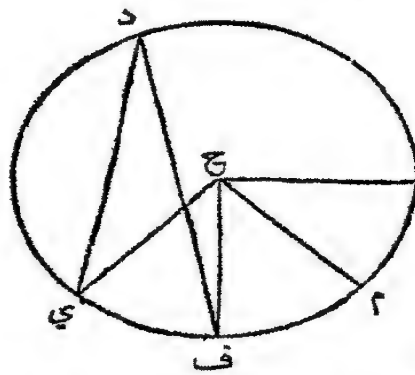
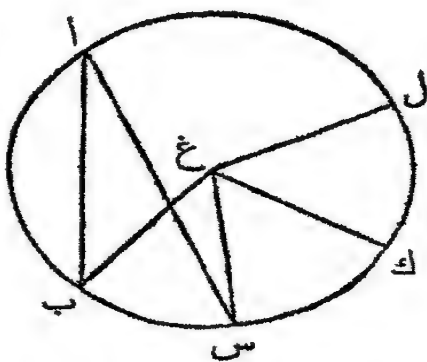
ليكن $ا ب س$ $ا د س$ ي مثلثين
 والضلعان $ب ا ا س$ فليناسبيا $د ا د ي$
 اي $ب ا : ا س :: د ا : د ي$ وليكن
 $ا ب و د س$ متوازيين و $ا س و د ي$ متوازيين
 فيكون $ب س و س ي$ على استقامة واحدة

لان الخط المستقيم $ا س$ يلاقي المتوازيين $ا ب$ $د س$ فالزاويتان المتبادلتان
 $ب ا س$ $ا س د$ متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ولهذا السبب ايضاً الزاوية $س د ي$ تعدل

الزاوية اس د فالزاوية ب اس تعدل س دى والمثلثان لها الزاوية عند د تعدل
الزاوية عند ا والاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة اي ب ا : اس ::
س د : دى فزوايا المثلث اب س تعدل زوايا المثلث د س ي (ق ٦ ك ٦)
فالزاوية اب س تعدل د س ي وقد تبهر ان ب اس تعدل اس د فلكل
اس ي يعدل الزاويتين اب س ب اس. اضف الزاوية المشتركة اس ب الى
المجاوئين فالزاويتان اس ي اس ب تعدلان اب س ب اس اس ب وهذه
الثلاث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فاذا اس ي اس ب تعدلان قائمتين
فالخطان ب س س ي على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١)

القضية الثالثة والثلاثون

في دوائر متساوية نسبة الزوايا في المركز او في المحيط بعضها الى بعض
كنسبة الاقواس التي تقابلها بعضها الى بعض. وهكذا القطعان ايضاً
لتكن اب س دى ف دائرتين متساويتين فنسبة الزاوية في المركز ب غ س
الى الزاوية في المركز ح ف والزاوية في المحيط ب اس الى الزاوية في المحيط
ى د فنسبة القوس ب س الى القوس ى ف والقطاع ب غ س : القطاع
ى ح ف :: القوس ب س : القوس ى ف

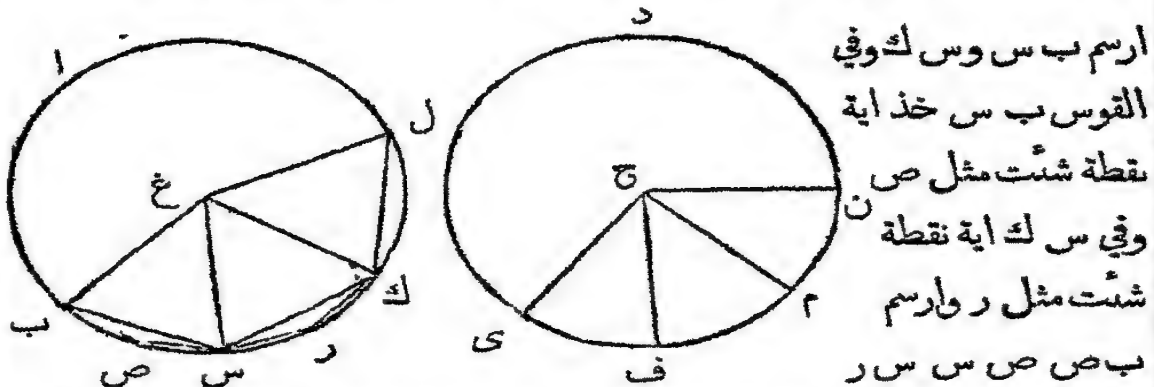


في الدائرة
اب س اقطع
اقواساً تعدل
القوس ب س
مثل س ك
وك ل وفي الدائرة

دى ف اقطع اقواساً تعدل القوس ى ف مثل ف م م ن. ارسم غ ك غ ل ح م
ح ن. فالزوايا ب غ س س غ ك ك غ ل متساوية لان الاقواس ب س س ك
ك ل متساوية (ق ٢٧ ك ٣) فاي مضروب كان القوس ب ل من القوس ب س
كان ب غ ل ذات هذا المضروب من ب غ س. وعلى هذا الاسلوب يتضح ان

ي ح ن ذات المضروب من ي ح ف الذي كان القوس ي ن من القوس ي ف
والقوس ب ل اذا عدل القوس ي ن فالزاوية ب غ ل تعدل الزاوية ي ح ن
(ق ٢٧ ك ٢) وان كان اعظم فاعظم وان كان اصغر فاصغر فنسبة ب س : ي ف
:: ب غ س : ي ح ف (حد ٥ ك ٥) ولكن ب غ س : ي ح ف :: ب ا س :
ي د ف (ق ١٥ ك ٥) لان كل واحدة مضاعف نظيرها (ق ٢٠ ك ٢) فسيكون القوس
ب س : القوس ي ف :: الزاوية ب غ س : الزاوية ي ح ف وكسبة الزاوية ب ا س
الزاوية ي د ف

كذلك القطاع ب غ س : القطاع ي ح ف :: القوس ب س : القوس ي ف



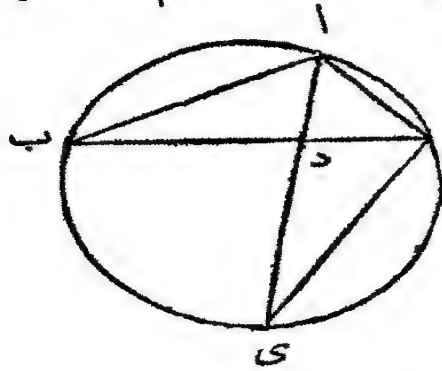
رك. فضلعان من المثلث ب غ س اي ب غ ع س يعدلان ضلعين من المثلث
غ س ك اي س غ غ ك والزاوية ب غ س = س ع ك فالقاعدة ب س = القاعدة
س ك (ق ٤ ك ١) والمثلث ب غ س = المثلث س غ ك. ولكون القوس ب س =
القوس س ك فالباقي من كل المحيط ب ا س يعدل الباقي س ا ك فالزاوية
ب ص س تعدل الزاوية س ر ك (ق ٢٧ ك ٢) والقطعة ب ص س تشبه القطعة
س ر ك (حد ٩ ك ٣) وهما على خطين مستقيمين متساويين ب س وس ك فهما
متساويان (ق ٢٤ ك ٢) فالقطعة ب ص س تعدل القطعة س ر ك وهكذا ايضاً
ببرهن ان القطاع ك غ ل يعدل ب غ س اوس غ ك. وهكذا يبرهن ايضاً ان
القطاعان ي ح ف ف ح م م ح ن متساوية. فاسي مضروب كان القوس ب ل
من القوس ب س فالقطاع ب غ ل هو ذات ذلك المضروب من القطاع
ب غ س وهكذا اي مضروب كان القوس ي ن من القوس ي ف فالقطاع
ي ح ن هو ذات ذلك المضروب من القطاع ي ح ف. فالقوس ب ل اذا
عدل القوس ي ن فالقطاع ب غ ل يعدل القطاع ي ح ن واذا كان اكر

فاكبر واذا كان اصغر فاصغر فاذا (ح د ه ك ه) القوس ب س : القوس ي ف ::
القطاع ب غ س : ي ح ف

قضية ب . ن

اذا تنصفت زاوية مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة ايضا فالقائم
الزوايا مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح قسبي القاعدة
مع مربع الخط المستقيم الذي ينصف الزاوية

ليكن ا ب س مثلثا ولتنصف الزاوية ب ا س منه بالخط المستقيم ا د الذي
يقطع القاعدة في النقطة د . فالقائم الزوايا ب ا
 \times ا س = ب د \times د س + ا د^٢



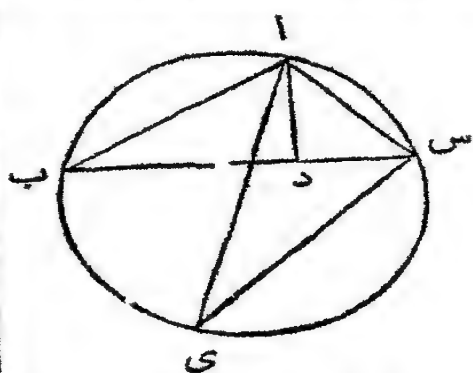
ارسم دائرة تحيط بالمثلث ا ب س (ق ٥ ك ٤) واخرج ا د حتى يلاقي المحيط في ي وارسم
ي س . فلكون الزاوية ب ا د تعدل الزاوية
س ا ي والزاوية ا ب د تعدل الزاوية ا ي س

(ق ٢ ا ك ٣) لانها في قطعة واحدة فالمثلثان ا ب د ا ي س متساويا الزوايا ونسبة
ب ا : ا د :: ي ا : ا س (ق ٤ ك ٦) فاذا ب ا \times ا س = ا د \times ا ي (ق ٦ ك ٦)
= ي د \times ا د + ا د^٢ (ق ٢ ك ٢) وي د \times ا د = ب د \times د س (ق ٣٥ ك ٣) فاذا
ب ا \times ا س = ب د \times د س + ا د^٢

قضية ج . ن

اذا رسم من زاوية مثلث خط مستقيم عمود على القاعدة فالقائم الزوايا
مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح العمود وقطر الدائرة
المحيطة بالمثلث

ليكن ا ب س مثلثا وليرسم العمود ا د على القاعدة ب س من الزاوية عند ا .



فالقائم الزوايا ب ا \times ا س يعدل القائم الزوايا
ا د في قطر الدائرة المحيطة بالمثلث

ارسم الدائرة ا س ب حتى تحيط بالمثلث

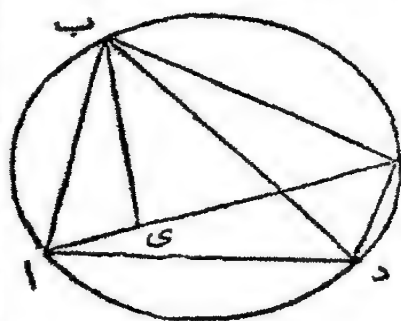
ا ب س (ق ٥ ك ٤) وارسم قطرها اي تم ارسم
المحيط ي س. فليكون القائمة ب د ا تعدل القائمة
ي س ا الواقعة في نصف دائرة والزاوية ا ب د

تعدل اي س لانها في قطعة واحدة (ق ٢١ ك ٢) فالمثلثان ا ب د اي س هما متساويان
الزوايا ونسبة ب ا : ا د :: ي ا : ا س (ق ٤ ك ٦) فاذا ب ا \times ا س = ا د \times ي ا
(ق ١٦ ك ٦)

قضيه د ن

القائم الزوايا مسطح قطري شكل ذي اربعة اضلاع في دائرة يعدل
القائم الزوايا مسطحي ضلعيه المتقابلين

ليكن ا ب س د شكلاً ذا اربعة اضلاع في دائرة. فالقائم الزوايا ا س \times ب د



يعدل القائم الزوايا ا ب \times س د و ب س \times ا د
اجعل الزاوية ا ب ي تعدل الزاوية د ب س

واضف الى كل واحدة منها الزاوية المشتركة
ي ب د. فالزاوية ا ب د = ي ب س. والزاوية
ب د ا = ب س ي (ق ٢٦ ك ٢) لانها في قطعة
واحدة فزوايا المثلث ا ب د تعدل زوايا المثلث

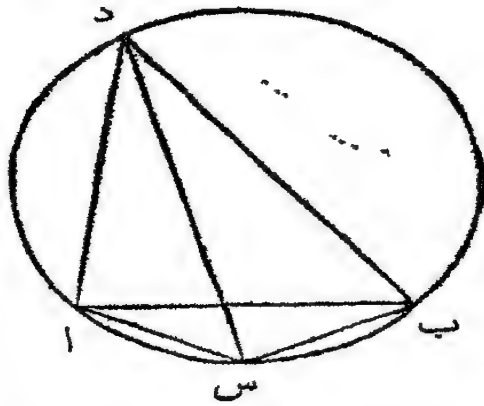
ب س ي ونسبة (ق ٤ ك ٦) ب س : س ي :: ب د : ا فاذا (ق ١٦ ك ٦)
ب س \times د ا = ب د \times س ي. ولكون الزاوية ا ب ي تعدل د ب س والزاوية
ب ا ي تعدل ب د س (ق ٢١ ك ٢) فزوايا المثلث ا ب ي تعدل زوايا المثلث
ب س د ونسبة ب ا : ا ي :: ب د : د س فاذا ب ا \times د س = ب د \times ا ي. وقد
تبرهن ان ب س \times د ا = ب د \times س ي فاذا ب س \times د ا + ب ا \times د س =

ب د × س ي + ب د × ا ي = ب د × ا س (ق ١ ك ٢) فالقائم الزوايا ب د ×
ا س = ا ب × س د + ا د × ب س

قضية ٥٠٨

اذا تنصف قوس دائرة ورسم من طرفيه ومن نقطة الانتصاف خطوط مستقيمة الى نقطة ما من المحيط تكون نسبة مجموع الخطتين المرسومين من طرفي القوس الى الخط المرسوم من نقطة انتصافه كنسبة وتر القوس الى وتر نصفه

لتكن ا ب د دائرة وليتنصف القوس ا ب منها في س ولترسم الخطوط



المستقيمة ا د س د ب د من طرفي القوس ومن نصفه الى النقطة د من المحيط فنسبة مجموع الخطتين ا د د ب الى د س كنسبة ب الى ا س

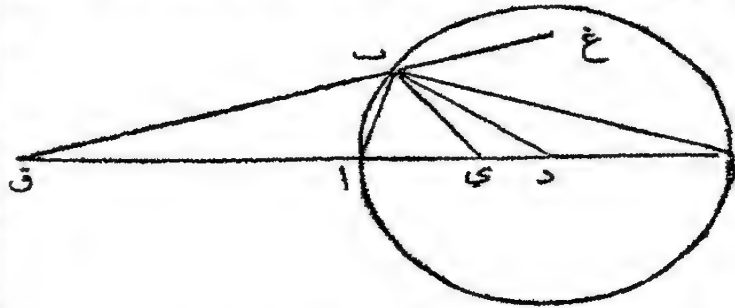
لكون ا د ب س ذا اربعة اضلاع في دائرة وقطرها ا ب ود س فالقائم الزوايا ا د × س ب + د ب × ا س = ا ب × س د

(ق د ك ٦) ولكن ا د × س ب + د ب × ا س = ا د × ا س + د ب × ا س لان
ا س = س ب فاذا ا د × ا س + د ب × ا س (ا ي) (ق ١ ك ٢) (ا د + د ب) ×
ا س = ا ب × س د. واضلاع اشكال متساوية قائمة الزوايا هي متناسبة بالتكافؤ
(ق ١٤ ك ٦) فتكون نسبة ا د + د ب : د س :: ا ب : ا س

قضية ٥٠٩

اذا تعينت نقطتان في قطر دائرة بعد اخراجه حتى ان القائم الزوايا مسطح القسمين بين النقطتين ومركز الدائرة يعدل مربع نصف القطر

ورسم من هاتين النقطتين خطان مستقيمان الى نقطة ما من المحيط
تكون نسبة احدهما الى الاخر كنسبة احد قسبي القطرين احدي
النقطتين المذكورتين والمحيط الى الاخر بين النقطة الاخرى والمحيط
لتكن اب س دائرة مركزها د. اخرج دا وعين فيه نقطتين ي وق حتى ان
القائم الزوايا ي د \times د ق يعدل مربع اد ويرسم ي ب ق ب الى ب نقطة من المحيط



فتكون نسبة ق ب :

ب ي :: ق ا : ا ي

ارسم ب د. فلكون

القائم الزوايا ق د \times د ي

يعدل مربع اد اود ب

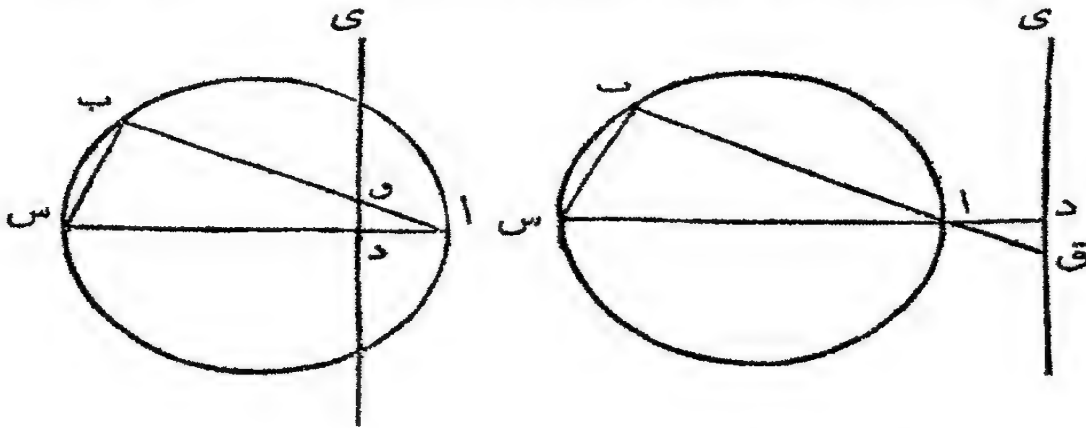
فنسبة ق د : د ب :: د ب : د ي (ق ١٧ ك ٦). فالثلثان ق د ب ب د ي
اضلاعها المحيطة بالزاوية المشتركة د هي متناسبة وها اذا متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦)
والزاوية د ي ب تعدل د ب ق و د ب ي تعدل د ق ب. ولكون الاضلاع
المحيطة بهذه الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ ك ٦) فنسبة ق ب : ب د :: ب ي :
ي د وبالمبادلة (ق ١٦ ك ٥) ق ب : ب ي :: ب د : ي د اوق ب : ب ي :: ا د :
د ي ولان ق د : د ا :: د ا : د ي فبالقسمة (ق ١٧ ك ٥) ق ا : د ا :: ا ي : ي د
وبالمبادلة (ق ١١ ك ٥) ق ا : ا ي :: د ا : ي د. وقد تبهرن ان ق ب : ب ي ::
ا د : د ي فتكون نسبة ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي

فريع. اذا رسم اب فلكون ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي تكون الزاوية ق ب ي
قد تنصفت بالخط اب (ق ٢ ك ٦). ولان ق د : د س :: د س : د ي وبالتركيب
(ق ١٨ ك ٥) ق س : د س :: د س : ي ي د وقد تبهرن ان ق ا : ا د اود س ::
ا ي : ي د فبالمساواة ق ا : ا ي :: ق س : س ي. ولكن ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي
فاذا ق ب : ب ي :: ق س : س ي (ق ١١ ك ٥) فاذا اخرج ق ب الى غ
ورسم ب س فالزاوية ي ب غ تنصف بالخط ب س (ق ١ ك ٦)

قضية ز.ن

إذا رُسم من طرف قطر دائرة خطٌ مستقيمٌ في الدائرة وإذا لاقى خطاً عموداً على القطر داخل الدائرة أو خارجها بعد إخراجها فالقائم الزوايا مسطح الخط المستقيم في الدائرة والقسم منه الواقع بين طرف القطر والخط العمودي على القطر يعدل القائم الزوايا مسطح القطر والقسم منه المقطوع بالعمود عليه

ليكن ا ب س دائرة قطرها ا س وليكن د ي عموداً على القطر ا س وليلاق

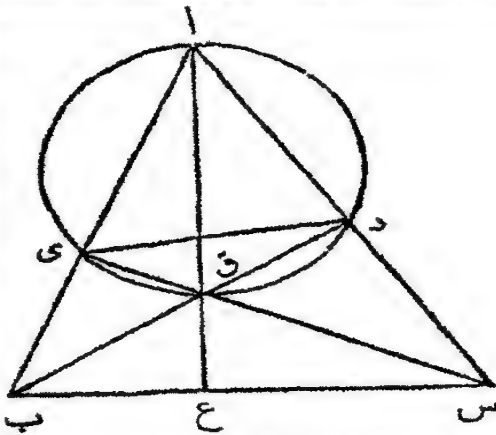


ا ب في ق فالقائم الزوايا $ا \times ا ق = س \times ا د$

أرسم ب س. فالزاوية ا ب س قائمة لانها في نصف دائرة (ق ٣١ ك ٣)
و ا د ق ايضاً قائمة حسب المفروض والزاوية ب ا س هي ذات الزاوية د ا ق او
مقابلة لها فللمثلتان ا ب س ا د ق متساويا الزوايا ونسبة ب ا : ا س :: ا د : ا ق
(ق ٤ ك ٦) فالقائم الزوايا $ا \times ا ق = س \times ا د$ (ق ١٦ ك ٦)

قضية ح.ن

العموديات من زوايا مثلث الى الاضلاع المقابلة تتقاطع في نقطة واحدة
ليكن ا ب س مثلثاً و ب د وس ي عمودين يتقاطعان في ق



ارسم ا ق و أخرج حتى يلاقي ب س في
غ . فالخط ا غ عمود على ب س . ارسم د ي
وارسم الدائرة ا ي ق تحيط بالمثلث ا ي ق .
فلكون ا ي ق قائمة فالخط ا ق قطر الدائرة
المحيطة بالمثلث ا ي ق (ق ٢١ ك ٣) و ا ق
ايضا قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ا د ق
فالنقط ا ي ق د في محيط دائرة واحدة .

ولكون الزاوية ي ق ب تعدل الزاوية د ق س (ق ١٥ ك ١) والزاوية ب ي ق تعدل
س د ق لانها قائمتان فالمثلثان ب ي ق س د ق متساويا الزوايا ونسبة ب ق :
ي ق :: س ق : د ق (ق ٤ ك ٦) وبالمبادلة ب ق : س ق :: ي ق : د ق (ق ١٦ ك ٥)
فلكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين ب ق س ي ق د متناسبة فالمثلثان
ب ق س ي ق د متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) فالزاوية ق س ب تعدل ي د ق .
ولكن ي د ق تعدل ي ا ق لانها في قطعة واحدة (ق ٢١ ك ٣) فالزاوية ي ا ق
تعدل الزاوية ق س غ والزاويتان ا ق ي س ق غ متساويتان ايضا لانها متقابلتان
(ق ١٥ ك ١) فالزاويتان ا ي ق ق غ س متساويتان ايضا (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١)
ولكن ا ي ق قائمة فتكون ق غ س ايضا قائمة و ا غ عمود على ب س

فرع . المثلث ا د ي يشبه المثلث ا ب س . لان المثلثين ب ا د س ا ي لها
الزاويتان عند د و ي قائمتان والزاوية عدا مشتركة بينهما فنسبة ب ا : د ا :: س ا :
ا ي وبالمبادلة ب ا : س ا :: د ا : ا ي . فالمثلثان ب ا س د ا ي لها الزاوية عدا
مشتركة بينهما والاضلاع المحيطة بهما متناسبة فهما متساويا الزوايا ومتشابهان (ق ٦
ك ٦)

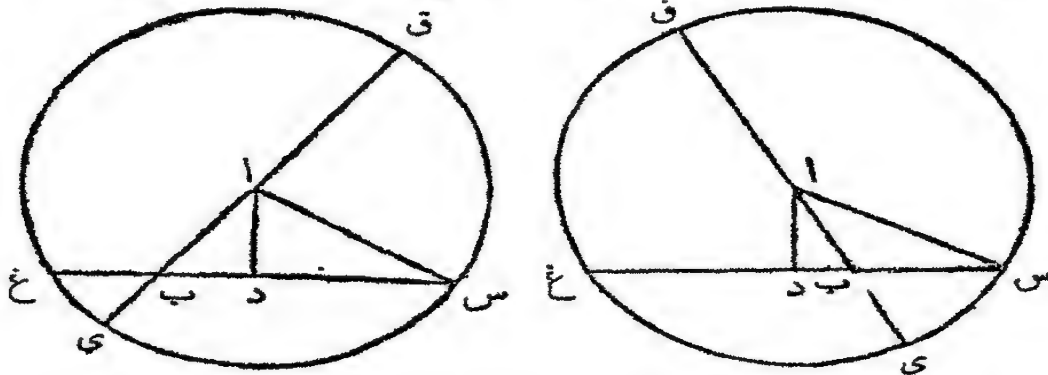
النائم الزوايا ب ا ي = س ا د

قضية ط . ن

اذا رسم من زاوية مثلث عمود على القاعدة فالقائم الزوايا مسطح مجتمع

الضلعين الاخرين في فضلتهما يعدل القائم الزوايا مسطح مجموع قسبي
القاعدة في فضلتهما

ليكن اب س مثلثا ومن الزاوية ب اس يرسم اد عمودا على القاعدة ب س



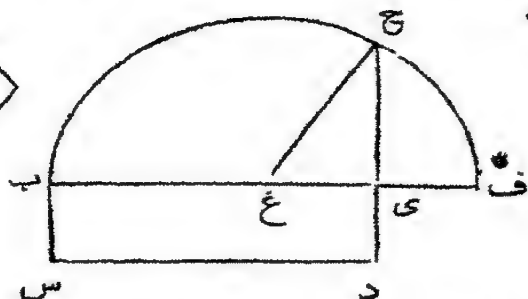
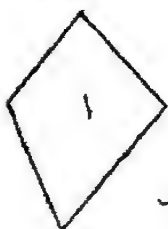
فالقائم الزوايا (اس + اب) × (اس - اب) = (س د + دب) × (س د - دب)
دب) اجعل ا مركزا واس اطول الضلعين نصف قطري وارسم الدائرة س ق غ
واخرج ب ا حتى يلاقي المحيط في ق وي. واخرج س ب حتى يلاقي المحيط في غ.
فلان اق = اس فالخط ب ق = اب + اس مجموع الضلعين ولان اي = اس
فالخط ب ي = اس - اب فضلة الضلعين. ولكون اد عمودا من المركز على غ س
فهو ينصفه ايضا فاذا وقع العمود داخل المثلث فالخط ب غ = دغ - دب =
دس - دب = فضلة قسبي القاعدة وب س = دب + دس = مجموع قسبي القاعدة
واذا وقع اد خارج المثلث فالخط ب غ = دغ + دب = س د + دب = مجموع
القسمين وب س = س د - دب = فضلتهما. وعلى الحالتين لان الخطين ق ي
غ س يتقاطعان في ب فالقائم الزوايا ق ب × ب ي = س ب × ب غ او حسبما
نقدم (اس + اب) × (اس - اب) = (س د + دب) × (س د - دب)

عمليات ملحقات بالكتاب السادس

قضية ي. ع

علينا ان نرسم مربعا يعدل شكلا مفروضا اذا اضلاع مستقيمة

ليكن α الشكل المفروض ذا الاضلاع المستقيمة . علينا ان نرسم مربعاً يعدل α



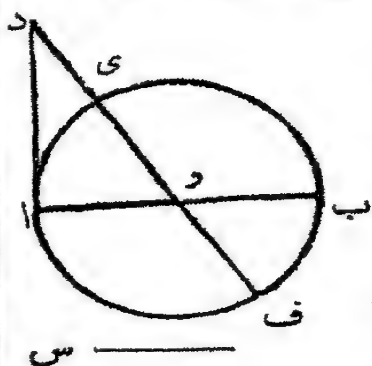
ارسم القائم الزوايا ب س دى
حتى يعدل α (ق ٤٥ ك ١)
واخرج احد اضلاعه ب ي
واجعل ي ف يعدل ي د
نصف ب ف في غ واجعل غ

مركزاً و غ ف او غ ب نصف قطر وارسم نصف الدائرة ف ح ب واخرج دى الى ح
ح ي^٢ = ب ي × ي ف (ق ١٢ ك ٦) = ب د = α فالمربع على ح ي يعدل α

قضية ك. ع

علينا ان نرسم شكلاً قائم الزوايا يعدل مربعاً مفروضاً وفضلة ضلعيه
المتواليين تعدل خطاً مفروضاً

ليكن س ضلعاً من المربع المفروض و ا ب فضلة ضلعي الشكل المطلوب



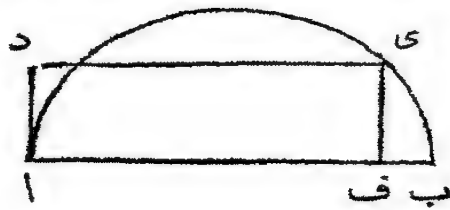
ارسم على ا ب دائرة ومن طرف القطر ارسم المماس
ا د حتى يعدل ضلعاً من مربع س وفي النقطة د والمركز
ارسم القاطع د ف فيكون ف د × دى الشكل المطلوب
اولاً فضلة ضلعيه يعدل ي ف او ا ب

وثانياً دى × د ف = د ا^٢ (ق ٢٦ ك ٢) و د ا = س

قضية ل. ع

علينا ان نرسم شكلاً قائم الزوايا حتى يعدل مربعاً مفروضاً ومجموع
ضلعيه المتواليين يعدل خطاً مفروضاً

ليكن س المربع المفروض و ا ب مجموع ضلعي الشكل المطلوب



اجعل اب قطراً وارسم
عليه نصف دائرة وارسم دى
حتى يوازي اب واجعل ا د
(اي ضلعاً من المربع المفروض)

البعد بينهما والخط دى فليقطع نصف الدائرة في ي ومن ي ارسم ي ف عموداً
على اب فيكون اف \times ف ب الشكل المطلوب
لان مجتمعهما يعدل اب ومسطحهما اف \times ف ب يعدل مربع ف ي او ا د
وا د^٢ = س

تعليقة. حتى تكون هذه القضية ممكنة لا يكون ا د اطول من نصف القطر. اي
ضلع من س لا يكون اطول من نصف الخط ا ب

قضية م. ع

علينا ان نرسم مربعاً تكون نسبته الى مربع مفروض كنسبة خط مفروض
الى خط اخر مفروض

ليكن اس المربع المفروض وى وف الخطين المفروضين

ليكن غ ح خطاً مستقيماً غير معين طوله وافصل منه غ ك حتى يعدل ي

ي
ق

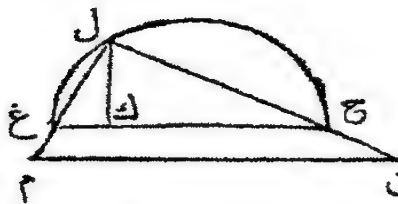
وك ح حتى يعدل ف وعلى

غ ح ارسم نصف دائرة وارسم

ك ل عموداً على غ ح وارسم

ل غ م حتى يعدل اب ارسم

م ن حتى يوازي غ ح واخرج



ل ح الى ن. فلكون م ن يوازي ع ح فنسبة ل م : ل ن :: ل غ : ل ح ول م^٢ :
ل ن^٢ :: ل غ^٢ : ل ح^٢ (ق ٢٢ ك ٦) ول غ ح مثلث قائم الزاوية فنسبة ل غ^٢ :
ل ح^٢ :: غ ك : ك ح فاذا ل م : ل ن :: غ ك : ك ح وقد قُرض ان غ ك = ي
وك ح = ق ول م = اب فالمربع على اب : المربع على ل ن :: ي : ف

قضية ن.ع

علينا ان نقسم مثلثا الى قسمين بخط من احدى زواياه حتى تكون
نسبة قسم الى اخر كنسبة خط مثل م الى خط مثل ن
اقسم ب س الى قسمين ب د و د س مناسبين للخطين م ون وارسم ا د

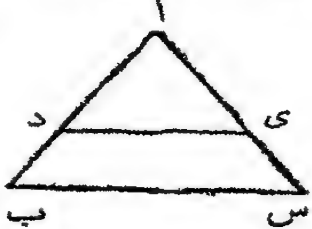


فينقسم المثلث حسب المفروض لان
المثلثات التي لها علو واحد بعضها الى
بعض كفواءها بعضها الى بعض فلما

ا ب د : ا د س :: ب د : د س :: م : ن س
تعليقة. يمكن انقسام مثلث الى اجزاء كثيرة مناسبة لخطوط مفروضة وذلك
باتقسام القاعدة على التناسب المفروض

قضية س.ع

علينا ان نقسم مثلثا الى قسمين بخط يوازي احد اضلاعه حتى نكون
نسبة قسم الى اخر كنسبة خط مستقيم م الى خط مستقيم ن
اجعل ا ب : ا د :: م : ن + م و ا رسم د ي حتى يوازي ب س فقد انقسم



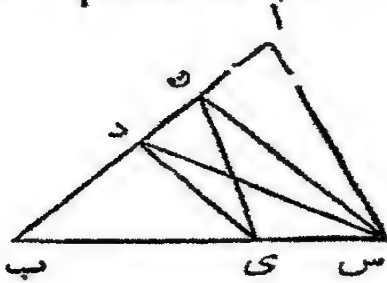
المثلث حسب المفروض

لان المثلثين ا ب س ا د ي متشابهان و ا ب س
ا د ي :: ا ب : ا د ولكن م : ن + م :: ا ب : ا د
فيكون ا ب س : ا د ي :: م : ن + م فاذا ب د ي س
ا د ي :: م : ن

قضية ع.ع

علينا ان نقسم مثلثا مفروضا الى قسمين بخط مستقيم من نقطة
مفروضة في احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط
مستقيم م الى خط مستقيم ن

ليكن $ا ب س$ المثلث المفروض ون النقطة المفروضة . ارسم $ن س$ واقسم $ا ب$ في $د$ حتى يكون $ا د : د ب :: م : ن$. وارسم $د ي$ حتى يوازي $ن س$ وارسم $ن ي$ فالخط $ن ي$ يقسم المثلث حسب المفروض



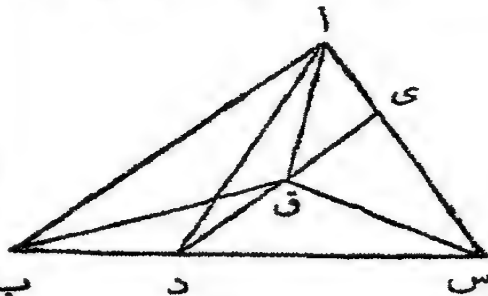
ارسم $د س$. فلأن $د ي$ $ن س$ متوازيان فالمثلثان $ن د ي$ $س د ي$ متساويان . اضع الى كل واحد

منهما المثلث $د ي ب$ فالمثلث $ن ي ب = د س ب$. فاذا طرح كل واحد من المثلث $ا ب س$ يبقى الشكل ذو الاضلاع الاربعة $ا س ي ن$ وهو يعدل المثلث $ا س د$ و $ا س د : د س ب :: ا د : د ب :: م : ن$ فيكون $ا س ي ن : ن ي ب :: م : ن$ تعلية . على هذا الاسلوب ينقسم مثلث الى اجزاء كثيرة متساوية بخطوط من نقطة مفروضة في احد اضلاعه . لانه اذا انقسم $ا ب$ الى اجزاء متساوية ورسم من نقط الانقسام خطوط توازي $ن س$ فانها تقطع $ب س$ و $ا س$ ومن هذه نقط التقاطع اذا رسمت خطوط الى $ن$ تقسم المثلث الى الاقسام المطلوبة

قضية ف . ع

علينا ان تقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط مستقيمة من زواياه الى نقطة واحدة داخله

اجعل $ب د$ ثلث $ب س$ وارسم $د ي$ حتى يوازي $ب ا$ الضلع الذي يلي $ب د$. نصف $د ي$ في $ق$ ومن $ق$ ارسم الخطوط المستقيمة $ق ا$ $ق ب$ $ق س$ فقد انقسم المثلث حسب المفروض



ارسم $د ا$. فلكون $ب د$ ثلث $ب س$ فالمثلث $ا ب د$ هو ثلث المثلث $ا ب س$.

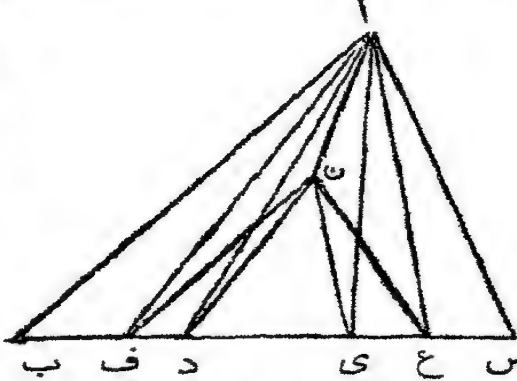
و $ا ب د = ا ب ق$ (ق ٢٧ ك ١) فاذا $ا ب ق$ هو ثلث $ا ب س$. ولأن $د ق = ق ي$ فالمثلث $ب د ق = ا ق ي$ وكذلك $س د ق = س ق ي$ فلكل $ب ق$ $س ق$ يعدل الكل $ا ق س$ وقد تبرهن ان $ا ب ق$ يعدل ثلث $ا ب س$ فكل واحد من المثلثات

ا ب ق ب ق س س ق ا يعدل ثلث ا ب س

قضية ص. ع

علينا ان نقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط من نقطة مفروضة داخله

اقسم ب س الى ثلاثة اقسام متساوية في د وى وارسم د ن ي ن. ارسم ايضا



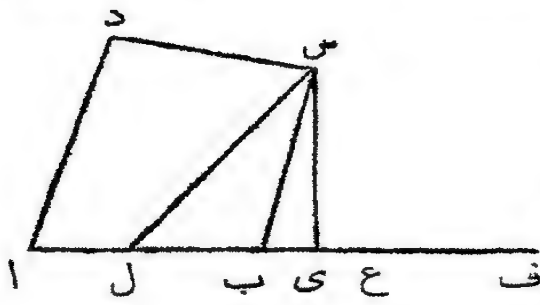
ا ف حتى يوازي د ن وارسم ا غ حتى يوازي ي ن. فاذا رسمت ن ف ن غ ن ا ينقسم المثلث حسب المفروض

ارسم ا د اى. فلكون ا ف و ن د متوازيين فالمثلث ا ف ن = ا ف د فاذا اُضيف اليهما المثلث ا ب ف يحدث

الشكل ا ب ف ن ذو الاربعه الاضلاع الذي يعدل المثلث ا ب د ولكن ب د انما هو ثلث ب س فالمثلث ا ب د هو ثلث ا ب س فالشكل ا ب ف ن هو ثلث المثلث ا ب س. ولان ا غ يوازي ن ي فالمثلث ا غ ن = ا غ ي. اضيف اليهما ا س غ فالشكل ا س غ ن يعدل المثلث ا س ي الذي هو ثلث ا ب س فالشكل ا س غ ن ثلث ا ب س فكل واحد من الاشكال الثلاثة ا ب ف ن ا س غ ن ن ف غ يعدل ثلث ا ب س

قضية ق. ع

علينا ان نقسم شكلا ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من احده زواياه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ن ارسم س ي عمودا على ا ب وارسم شكلا ذا زوايا فاعمة حتى يعدل الشكل



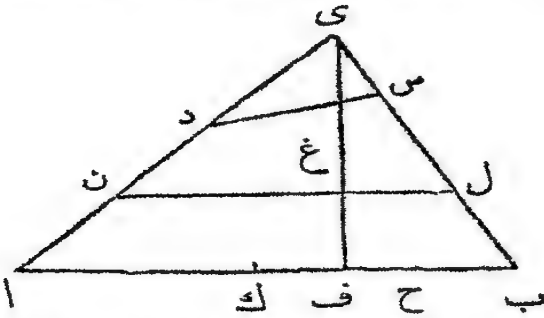
المفروض وليكن س ي ضلعاً من اضلاع
وي ف ضلعاً اخر من اضلاع واقسم
ي ف في غ حتى تكون نسبة م : ن :: غ : ف
ي غ . اجعل ب ل يعدل مضاعف ي غ
وارسم ل س . فقد انقسم الشكل حسب
المفروض

لان المثلث س ب ل يعدل س ي > ي غ . فنسبة القائم الزوايا س ي > غ ف
: س ب ل :: غ ف : ي غ . ولكن س ي > غ ف = الشكل د ل ونسبة غ ف :
غ ي :: م : ن فاذا د ل : س ل ب :: م : ن

قضية ر.ع

علينا ان تقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط يوازي احد
اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ن

ليكن ا ب س د الشكل . اخرج ا د و ب س حتى يلتقيا في ي وارسم ي ف
عموداً على ا ب ونصّفه في غ وعلى غ ف ارسم شكلاً قائم الزوايا حتى يعدل المثلث
ي د س وليكن ح ب ضلعاً اخر من هذا



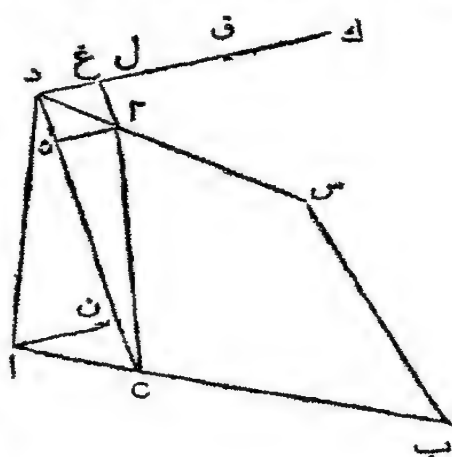
الشكل . اقسم ا ح في ك حتى تكون
نسبة ا ك : ك ح :: م : ن واجعل ي ا :
ي ن : ا ب : ك ب . ارسم ن ل حتى
يوازي ا ب فينقسم الشكل حسب

المفروض . لان المثلثين ي ا ب ي ن ل متساويان تكون نسبة ي ا ب : ي ن ل ::
ي ا : ي ن وبالمفروض ي ا : ي ن :: ا ب : ك ب فتكون نسبة ي ا ب :
ي ن ل :: ا ب : ك ب :: ا ب : غ ف :: ا ب : ك ب وبالشكل ي ا ب =
ا ب > غ ف فاذا ي ن ل = ك ب > غ ف و ا ك > غ ف = ا ل . ولكن ا ح >
غ ف = ا س فاذا ا ك ح > غ ف = ن س و ا ك > غ ف : ك ح > غ ف :: ا ك : ك ح

واك:كح:م:ن فاذا ال:ن:س:م:ن

قضية ش.ع

علينا ان تقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخطٍّ من نقطة في احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ت
ارسم ه د واسد عليه شكلاً قائم الزوايا يعدل الشكل المفروض وليكن دك



ضلعاً الاخر. اقسم دك في ل حتى تكون
نسبة دل:ل:ك::م:ت. واجعل دق
يعدل ٢ دل. واجعل ق غ يعدل العمود
ان وارسم غ ٢ حتى يوازي د ه وارسم ه ٢
فينقسم الشكل حسب المفروض

ارسم العمود ه ٢. فبالشكل ه د × دك

= اس و ه د × دق = د ه × ان + د ه × د

٢ ه اي ه د × دق يعدل مضاعف مجتمع

المثلثين ه د ا ه د ه ٢. فلان دل نصف دق فالقائم الزوايا ه د × دل = ا ه ٢ د

فاذا ه د × دل = ك ه ٢ ب س ٢. ولكن ه د × دل: ه د × دل ك:: دل:ل:ك::

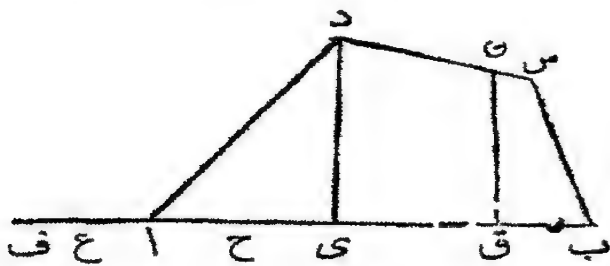
م:ت فاذا ا ه ٢ د: ه د ب س ٢:: م:ت

قضية ت.ع

علينا ان تقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع بخطٍّ عموديٍّ على احد اضلاعه

حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ت

ليكن ا ب س د الشكل المفروض المطلوب انقسامه على نسبة م:ت بخطٍّ



عمودي على الضلع اب
ارسم المخط دي عموداً على اب وان
عليه شكلاً قائم الزوايا دي \times ي ف
حتى يعدل الشكل اب س د واقسم
ف ي في غ حتى تكون نسبة ف غ :

غ ي :: م : ت . نصف ا ي في ح واقسم الشكل ذا الاربعه الاضلاع ي س الى
قسمين بالمخط ن ق الذي يوازي دي حتى تكون نسبة احدها الى الاخر كنسبة
ف غ : غ ح . فالمخط ن ق يقسم الشكل اس حسب المفروض

لان دي \times ي ف = اس ودي \times ي ح = د ا ي فاذا دي \times ح ف =
ي س فالشكل ي س قد انقسم على نسبة انقسام ف ح قاعدة القائم الزوايا الذي
يعدله فاذا ق س = دي \times ف غ وي ن = دي \times غ ح وان = دي \times غ ي
فنسبة ق س : ان :: ف غ : غ ي :: م : ت

اصول الهندسة

مضافات

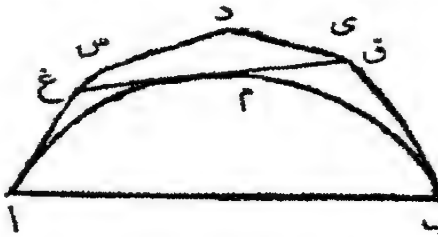
الكتاب الاول

في تزيين الدائرة

سابقة

كل خطٍ منحنياً كان او مركباً من خطوطٍ مستقيمة محيطٍ بخطٍ
محدّبٍ هو اطول من الخطِّ المحاط به

ليكن ا م ب الخطُّ المحاط به فهو اقصر من الخطِّ ا ع د ب المحيط به
فان لم يكن ا م ب اقصر من كل خطٍّ محيط به فبالضرورة يوجد بين الخطوط



المحيطة خطٍّ اقصر من البقية واقصر من ا م ب
او يماثلة. ليكن ا س د ي ب هذا الخط.

ارسم بين الخطِّ المحيط والمحاط به خطاً اخر
مستقيماً لا يلاقي ا م ب او يمسه فقط مثل

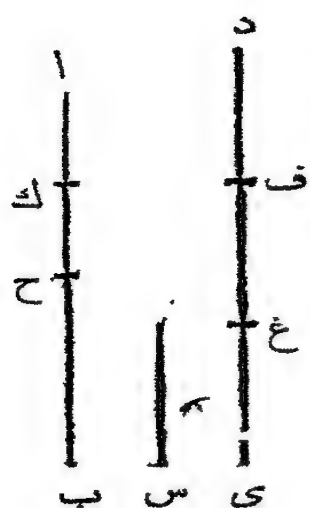
الخطِّ غ ق. فالخط غ ق انما هو اقصر من الخط ع س د ي ق. فاذا وضع ع ق
عوض س د ي ق يكون ا غ ق ب اقصر من ا غ د ق ب وقد فرض ان هذا الاخير
هو اقصر جميع الخطوط المحيطة فذاك محال فكل خط محيط بالخط ا م ب هو
اطول منه

فرغ اول. محيط شكل كثير الاضلاع في دائرة هو اقصر من محيط الدائرة

فرع ثانٍ. اذا رُسم من نقطة مفروضة خطان مستقيمان يمسان دائرة فيجانبهما هو اطول من القوس المقطوع بهما فيحيط شكل كثير الاضلاع يحيط بدائرة هو اطول من محيط الدائرة

القضية الاولى. ن

اذا فرض مقداران غير متساويين وطرح من اكبرها نصفه ومن الباقي نصفه الى اخره يبقى اخيراً مقداراً اصغر من اصغر المقدارين المفروضين ليكن ا ب اكبر مقدارين وس اصغرهما. فاذا طرح من ا ب نصفه ومن الباقي نصفه الى اخره يبقى اخيراً مقداراً اصغر من س

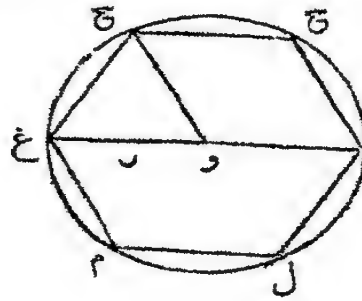
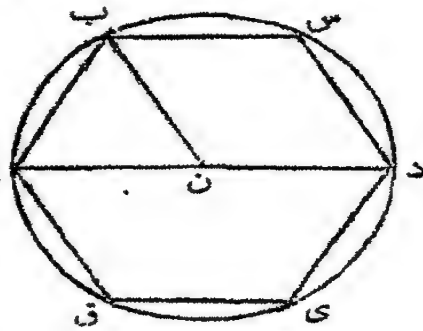


لأنه قد يمكن ان يتكرر س حتى يصير اكبر من ا ب. فليكن د ي مضروباً للمقدار س اكبر من ا ب وليكن فيه الاقسام د ف ف غ غ ي وكل قسم فليعدل س. اطرح من ا ب نصفه ب ح ومن ا ح اطرح نصفه ح ك وكرر العمل حتى ان اقسام ا ب تماثل اقسام د ي عدداً اي ا ك ك ح ح ب. فلكون د ي اعظم من ا ب والقسم ي غ المطروح من د ي ليس هو نصف د ي ولكن ح ب القسم المطروح من ا ب هو نصفه فالباقى غ د هو اكبر من الباقي ا ح. ولكون غ د اكبر من ح ا والقسم غ ف ليس اكثر من نصف د غ والقسم ح ك هو نصف ا ك فالباقى ف د اعظم من الباقي ا ك ولكن ف د يعدل س فاذا س اكبر من ا ك او ا ك انما هو اصغر من س

القضية الثانية. ن

اشكال كثيرة الاضلاع المتساوية ومتماثلة في عدد اضلاعها ومرسومة في دوائر هي متشابهة ونسبة بعضها الى بعض كنسبة مربعات اقطار الدوائر التي رُسمت فيها

ليكن ا ب س د ي ق و غ ح ج ك ل م شكليْن اضلاعهما كثيرة متساوية



وليكونا متماثلين

في عدد اضلاعهما

ومرسومين في

دائرتين ا ب د ب

و غ ح ك فهما

متشابهان ونسبة

ا ب س د ي ق الى و غ ح ج ك ل م كنسبة مربع قطر الدائرة ا ب د الى مربع قطر الدائرة و غ ح ك

استعلم ن وو مركزي الدائرتين وارسم ان و ع و واخرجهما حتى يلاقيا المحيطين

في د و ك. ارسم ب ن و ح و. فلكرن الخطوط المستقيمة ا ب ب س س د د ي

ي ق ق ا متساوية فالاقواس التي تقابلها ايضا متساوية (ق ٢٨ ك ٢) ولذلك

الاقواس و غ ح ج ج ك ك ل ل م م غ هي متساوية ايضا وهي تماثل اقواس

الدائرة الاخرى عددا فاي جزء كان القوس ا ب من المحيط ا ب د كان القوس

و غ ح ذات ذلك الجزء من المحيط و غ ح ك. والزاوية ا ن ب ذات الجزء من اربع

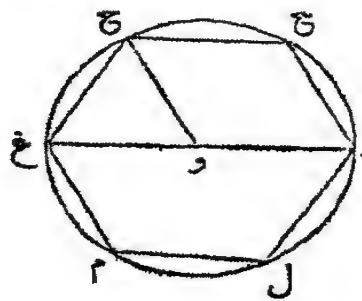
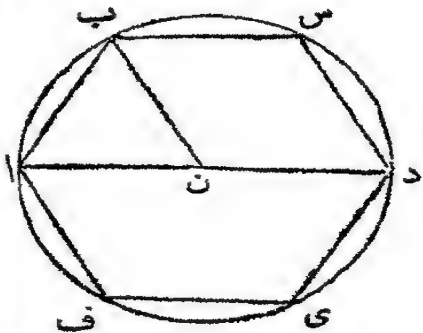
زوايا قائمة الذي كان القوس ا ب من المحيط ا ب د (ق ٢٣ ك ٦) والزاوية و غ ح

هي من اربع زوايا قائمة ما كان القوس و غ ح من المحيط و غ ح ك (ق ٢٣ ك ٦)

فالزاويتان ا ن ب و غ ح هما جزءان متساويان كل واحد من اربع زوايا قائمة

فهما متساويان. والمثلثان المتساويان الساقين ا ن ب و غ ح هما متساويان الزوايا ايضا

والزاوية ا ب ن تعدل الزاوية و غ ح و. وعلى هذا الاسلوب اذا رسم ن س و ج



يبرهن ان الزاوية

ن ب س تعدل

و ح ج. فالكل

ا ب س يعدل

الكل و غ ح ج.

وهكذا يبرهن في

بقية زوايا الشكليْن فهما متساويان الزوايا. وقد فرض انهما متساويان الاضلاع. فالاضلاع

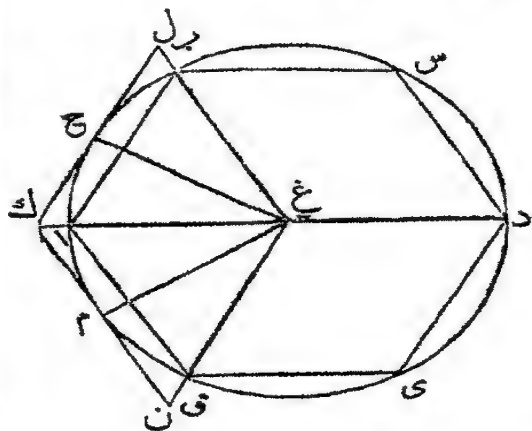
التي تلى الزوايا المتساوية هي متناسبة. فالشكلان متشابهان (حد ١ ك ٦) والاشكال
الكثيرة الاضلاع المتشابهة هي كمربعات اضلاعها المتشابهة (ق ٢٠ ك ٦) فالشكل
اب س دى ف: غ ح ج ك ل م:: مربع اب: مربع غ ح. ولكون المثلثين اب ن
غ ح ومتساويي الزوايا فرقع اب: مربع غ ح:: مربع ان: مربع غ و (ق ٤ ك ٦)
او:: ٤ ان: ٤ ع و (ق ١٥ ك ٥) اي:: ا د: غ ك (فرع ٢ ق ٨ ك ٢) فالشكل
اب س دى ف: غ ح ج ك ل م:: ا د: غ ك. وقد تبرهن انهما متشابهان
فرع. كل شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة هو متساوي الزوايا. لان
المثلثات المتساوية الساقين التي تلتقي زواياها في المركز هي متساوية ومتشابهة والزوايا
عند قواعدها متساوية فزوايا الشكل متساوية

القضية الثالثة. ع

مفروض ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة. علينا ان نجد
ضلع شكل مثله محيط بالدائرة

ليكن اب س دى ق شكلاً كثير الاضلاع المتساوية في دائرة. علينا ان نجد

ضلع شكل مثله محيط بالدائرة



استعلم مركز الدائرة غ وارسم ع ا غ ب
ونصف القوس اب في ح ومن ح ارسم
المماس ل ح ك الذي يمس الدائرة في ج
ويلاقي غ ا وع ب بعد اخراجها في ك ول
فالخط ك ل هو ضلع الشكل المطلوب.
اجعل الزاوية ك غ ن تعدل ك غ ل.

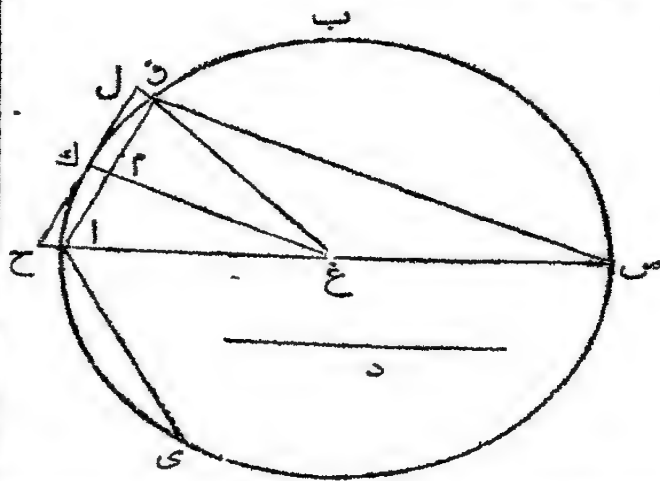
ارسم غ ن حتى يعدل غ ل وارسم ك ن وارسم ع م عموداً على ك ن وارسم ح غ
لكون القوس اب قد تنصف في ح فالزاوية ا غ ح تعدل الزاوية ب غ ح
(ق ٢٧ ك ٢) ولكون ك ل يمس الدائرة في ح فالزاويتان ك ح غ ل ح غ قائمتان
(ق ١٨ ك ٢) فزاويتان من المثلث ك ح غ تعدلان اثنتين من المثلث ل ح غ
والضلع غ ح مشترك بينهما فهما متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع غ ل يعدل الضلع

غ ك. ثم في المثلثين ك غ ل ك غ ن الضلع غ ل = غ ن وغ ك مشترك بينهما
والزاوية ل غ ك تعدل ك غ ن فالقاعدة ك ل = ك ن (ق ٤ ك ١) والمثلث ك غ ن
متساوي الساقين فالزاوية غ ك ن = غ ن ك والزاويتان غ م ك غ م ن قائمتان
فالمثلثان غ م ك ع م ن متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك م = م ن فقد تنصف
ك ن في م وك ن = ك ل فإذا ك م = ك ح والضلع غ م = غ ح (ق ٤ ك ١) فالنقطة م هي
في محيط الدائرة ولكون ك م غ قائمة فالخط ك م مماس الدائرة. وهكذا اذا رُسِمت
خطوط مستقيمة من المركز الى بقية زوايا الشكل في الدائرة يرسم شكل محيط بالدائرة
اضلاعه تعدل ك ل وعدد الاضلاع يماثل اضلاع الشكل في الدائرة
فرع اول. اذا جُعِل غ مركزاً و ع ل او غ ك او ع ن نصف قطر ورُسِمت
دائرة فالشكل يقع في تلك الدائرة ويشبه ا ب س دى ق

فرع ثان. نسبة ا ب : ك ل :: العمود من غ على ا ب : العمود من غ على ك ل
اي: نصف قطر الدائرة فمحيط الشكل في الدائرة : محيط الشكل المحيط بالدائرة ::
العمود من المركز على ضلع من اضلاع الشكل في الدائرة : نصف قطر الدائرة

القضية الرابعة. ن

اذا فُرِضَتْ دائرة فقد يمكن ان يوجد شكلان متشابهان اضلاعهما
كثيرة احدهما في الدائرة والاخر محيطٌ بها وفضلتهما اقل من مساحة
مفروضة



ليكن ا ب س الدائرة
المفروضة ومربع د مساحة مفروضة
فقد يمكن ان يرسم شكل كثير
الاضلاع في ا ب س واخر يشبهه
محيطاً بها وتكون فضلة الشكلين
اقل من مربع د

ارسم في الدائرة ا ب س
الخط المستقيم اى حتى يعدل د.

ولم يكن ا ب ربع محيط الدائرة. من ا ب اطرح نصفه ومن الباقي نصفه وهكذا حتى يبقى ا ق اقل من القوس ا ي (ق ١ ك ١ مضافات) استعلم المركز غ وارسم القطر ا س والمخطين المستقيمين ا ق ق غ. نصّف القوس ا ق في ك وارسم ك غ وارسم ح ل حتى يمسّ الدائرة في ك ويلقي غ ا غ ق بعد اخراجها في ح ول وارسم س ق المثلثان ح غ ل ا غ ق متساويا الساقين والزاوية ا غ ق مشتركة بينهما فهما متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) والزاويتان غ ح ل غ ا ق متساويتان. ولكن الزاوية غ ك ح = س ق لانها قائمتان. فالمثلثان ح غ ك ا س ق متساويا الزوايا (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) وقد استعلم القوس ا ق بتنصيف القوس ا ب ثم بتنصيف النصف الى اخره فالقوس ا ق يتعدد مراراً معلومة في القوس ا ب فيتعدّد ايضا في محيط الدائرة ا ب س مراراً معلومة فيكون الخط المستقيم ا ق ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في الدائرة ا ب س ويكون ح ل ضلع شكل مثله محيط بالدائرة ا ب س (ق ٢ ك ١ مضافات). ليكن عن الشكل في الدائرة بحرف مثل ن وعن الشكل المحيط بها بحرف مثل م. فلكون هذين الشكلين متشابهين تكون نسبة احدهما الى الآخر كمرتبّي الضلعين المتشابهين ح ل م ا ق (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) اي (لكون المثلثين ح ل غ ا ق غ متشابهين) كنسبة مربع ح غ الى مربع ا غ الذي يعدل مربع غ ك. وقد تبرهن ان المثلثين ح غ ك ا س ق متشابهان. فتكون نسبة ا س : س ق :: الشكل م : الشكل ن. وبالطرح مربع ا س : زيادته على مربع س ق اي مربع ا ق (ق ٤٧ ك ١) :: الشكل م : زيادته على الشكل ن. ولكن مربع ا س اي المربع المحيط بالدائرة ا ب س هو اعظم من شكل ذي ثمانية اضلاع متساويه محيط بالدائرة لانه محيط بذلك الشكل. والشكل ذو الثمانية اضلاع اعظم من شكل ذي ستة عشر ضلعاً وهلم جرا. فمربع ا س هو اعظم من الشكل المرسوم حول الدائرة بانقسام القوس ا ب حسباً تقدم فروع اعظم من الشكل م. وقد تبرهن ان مربع ا س : مربع ا ق :: الشكل م : فضلة الشكلين. فلكون ا س اعظم من م يكون مربع ا ق اعظم من فضلة الشكلين (ق ١٤ ك ٥) ففضلة الشكلين اذا هي اقل من مربع ا ق ا ق اقصر من د. ففضلة الشكلين اقل من مربع د اي من المساحة المفروضة

فرع اول. فضلة الشكلين اعظم من فضلة احدهما والدائرة. فيمكن ان يرسم شكل في الدائرة او محيط بها تكون فضلة احدهما والدائرة اقل من مساحة مفروضة

فرع ثانٍ: المساحة التي هي أكبر من كل شكل تُرسم في الدائرة أو أصغر من

س

مساحة س. فالاشكال التي

المفروض أكبر من د. ولكن ب أكبر من ا بمساحة س فلا يرسم شكل محيط

ب اصغر من ابعاضه س بيان انه لا يمكن ان يرسم في الدائرة اشكل الا ما كان

ما متساویان

مساحة دائرة تعدل القائم الزوايا مسطح نصف قطرها في خط

لیکن اب س دائرہ مرکزها د و قطرها اس. فاذا اخرج اس واخذ اح

ج ع ك

—

الزوايا \times

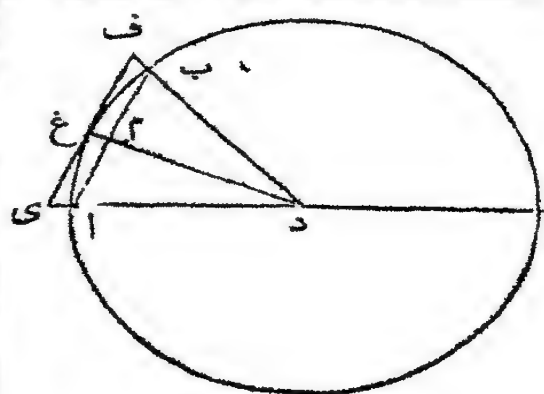
て

ليكن ا ب ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في الدائرة ا ب م. نصِّف

القوس ا ب في غ ومن غ ارسم المماس ي غ ف الذي يلاقي د ا ود ب بعد اخراجها
 في ي وف . فيكون ي ف ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية محيط بالدائرة ا ب س
 (ق ٢ ك ١ مضافات) . اقطع من ا س بعد اخراجه ا ك حتى يعدل نصف محيط
 الشكل الذي كان ا ب ضلعاً من اضلاعه واقطع ايضاً ال حتى يعدل نصف
 محيط الشكل الذي كان ي ف ضلعاً من اضلاعه . فيكون ا ك اقصر من ا ح وال
 اطول من ا ح (سابقة المضافات) ثم في المثلث ي د ف قد رُسم د غ عموداً على
 القاعدة فالمثلث ي د ف يعدل القائم الزوايا د غ في نصف ي ق (ق ١ ك ١)
 وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند د والتي يتركب منها الشكل المحيط بالدائرة
 فالشكل كله يعدل القائم الزوايا د غ في ال الذي فُرض انه نصف محيط الشكل
 (ق ١ ك ٢) او يعدل د ا × ال ولكن ال اطول من ا ح فالقائم الزوايا د ا × ال
 اكبر من د ا × ا ح اي القائم الزوايا د ا × ا ح اصغر من د ا × ال اي اصغر من
 كل شكل يحيط بالدائرة ا ب س

واما المثلث ا د ب فانه يعدل القائم الزوايا د م في نصف ا ب فهو اصغر من
 القائم الزوايا د غ او د ا في نصف ا ب . وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند
 د والتي يتركب منها الشكل في الدائرة ا ب س . فكل الشكل يعدل د ا × ا ك
 لان ا ك = نصف محيط الشكل في الدائرة . والقائم الزوايا د ا × ا ك هو اصغر من
 القائم الزوايا د ا × ا ح فبلاخرى يكون الشكل الذي ا ب ضلعاً منه اصغر من د ا
 × ا ح . اي د ا × ا ح اكبر من كل شكل يمكن رسمه في الدائرة ا ب س . وقد
 تبهرن ان د ا × ا ح اصغر من كل شكل يحيط بالدائرة ا ب س فالقائم الزوايا د ا
 × ا ح يعدل الدائرة ا ب س (فرع ٢ ق ٤ ك ١ مضافات) ودا هو نصف قطر
 الدائرة ا ب س واح نصف محيطها

فرع اول . لكون د ا : ا ح :: د ا : د ا × ا ح (ق ١ ك ٦) وقد تبهرن ان د ا ×
 ا ح = مساحة الدائرة التي كان د ا نصف قطرها فنسبة نصف قطر دائرة : نصف
 محيطها او القطر كله الى المحيط كله :: مربع نصف القطر : مساحة الدائرة



فرع ثانٍ .
يمكن ان
يرسم شكل
كثير
الاضلاع
المتساوية
محيط بدائرة

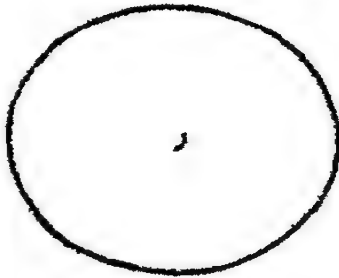
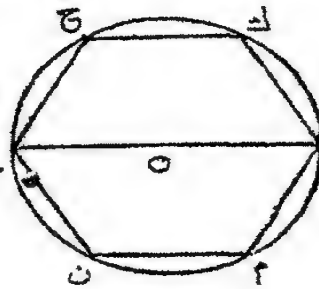
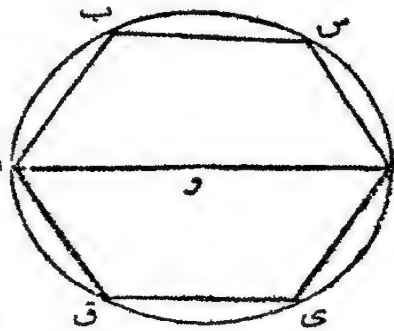
حتى تكون فضلة محيطه ومحيط الدائرة اقل من خط مفروض . ليكن ن ق الخط
المفروض . اقطع منه ن ر اقل من نصفه واقل من ا د . وليرسم شكل محيط بالدائرة
ا ب س حتى تكون فضلة الشكل والدائرة اقل من مربع ن ر (فرع اول ق ك ا
مضافات) وليكن ي ف ضلع هذا الشكل . فقد تبرهن ان الدائرة تعدل د ا × ح
والشكل المحيط يعدل د ا × ا ل فضلة الشكل والدائرة تعدل د ا × ح ل فاقام
النوايا د ا × ح ل اصغر من مربع ن ر . ولان د ا اطول من ن ر يكون ح ل
اقصر من ن ر ومضاعف ح ل اقصر من مضاعف ن ر وبالاخرى مضاعف ح ل
اقصر من ن ق . ولكن ح ل هو فضلة نصف محيط الشكل الذي كان ي ف ضلعاً
منه ونصف محيط الدائرة . فمضاعف ح ل هو فضلة كل محيط الشكل وكل محيط
الدائرة (ق ه ك ه) فضلة محيط الشكل ومحيط الدائرة هي اقل من الخط المفروض
ن ق

فرع ثالث . يمكن ان يرسم شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة حتى تكون
فضلة محيط الدائرة ومحيطه اقل من خط مفروض

القضية السادسة . ن

نسبة مساحات الدوائر بعضها الى بعض هي كنسبة مربعات اقطارها
بعضها الى بعض

ليكن ا ب د غ ح ل دائرتين . فمساحة الدائرة ا ب د الى مساحة الدائرة



غ ح ل ك مربع القطر
اد الى مربع القطر
غ ل
ليكن

اب س د ي ق

وغ ح ك ل م ن

شكلين متشابهين لهما اضلاع كثيرة في الدائرتين وليكن
ر مساحة ما وليكن نسبة مربع اد الى مربع عل كالدائرة
اب د الى ر. فليكون الشكلين اب س د ي ق
وغ ح ك ل م ن متشابهين فنسبة مساحة احدهما الى
مساحة الاخر كمربع قطر دائرة الواحد الى مربع قطر

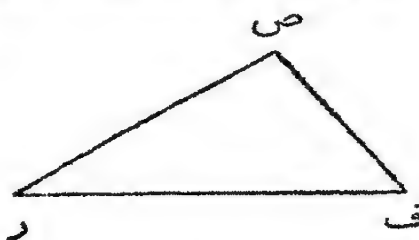
دائرة الاخر (ق ٢ ك ١ مضافات) فنسبة اد : غ ل :: الشكل اب س د ي ق
: الشكل غ ح ك ل م ن. ولكن اد : غ ل :: الدائرة اب د : ر. فالشكل
اب س د ي ق : الشكل غ ح ك ل م ن :: اب د : ر. والدائرة اب د <
اب س د ي ق فتكون ر < غ ح ك ل م ن (ق ١٤ ك ٥) اي راكبر من كل
شكل مرسوم في الدائرة غ ح ل

وهكذا يبرهن ان ر اصغر من كل شكل يرسم حول الدائرة غ ح ل فاذا ر =
الدائرة غ ح ل (فرع ٢ ق ٤ ك ١ مضافات) وقد فرض ان اب د : ر :: اد :
غ ل فتكون اب د : غ ح ل :: اد : غ ل

فرع اول. نسبة محيطات الدوائر بعضها الى بعض كنسبة اقطارها بعضها
الى بعض

لفرض ان الخط المستقيم ك = نصف محيط الدائرة اب د والخط المستقيم
ي = نصف محيط الدائرة غ ح ل. فالقائم الزوايا ا و = ك = اب د وغ ه = ي =
غ ح ل (ق ٥ ك ١ مضافات) فنسبة
ا و = ك : غ ه = ي : اد : غ ل ::
ا و : غ ه = ا و : ب و : ك : ا و :: غ ه : ي : غ ه :: غ ه : ي : غ ه اذا

كانت على اء واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعضها
(ق ١ ك ٦) فنسبة ك : ا و :: ي : غه وبالمبادلة ك : ي :: ا و : عه فادا تضاعف
كل واحد نكون نسبة المحيط ا ب د : المحيط ع ح ل :: القطر ا د : القطر ع ل
فرع ثاني . الدائرة المرسومة على المضلع الذي يقابل القائمة في مثلث ذي قائمة



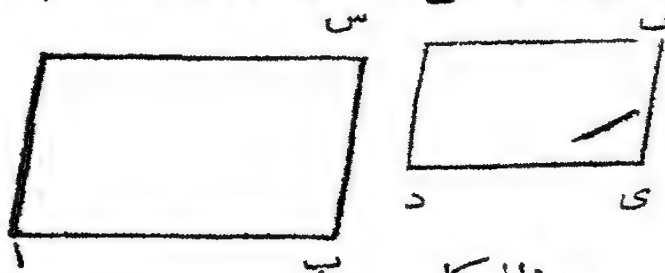
تعدل الدائرتين المرسومتين على الضلعين
الاخرين . لان نسبة الدائرة على ص ر .
الدائرة على ر ف :: مربع ص ر : مربع ر ف .
والدائرة على ف ص : الدائرة على ر ف : مربع

ف ص : مربع ر ف . فالدائرتان على ص ر و ص ف : الدائرة على ف ر :: مربع
ص ر و ص ف : مربع ر ف (ق ٢ ك ٥) ولكن مربع ص ر و ص ف يعدلان
مربع ر ف (ق ٤٧ ك ١) فالدائرتان على ص ر و ص ف تعدلان الدائرة على ر ف

القضية السابعة . ن

اشكال متوازية الاضلاع ومتساوية الزوايا تكون نسبة بعضها الى
بعض كنسبة مسطح الاعداد التي تناسب اضلاعها بعضها الى بعض

ليكن ا س و د ف شكلين متوازيي الاضلاع متساويي الزوايا . وليكن م ن



ف ق اربعة اعداد ولتكن
نسبة ا ب : ب س :: م : ن
ونسبة ا ب : د ي :: م : ف
ونسبة ا ب : ي ف :: م : ق

فبالمساواة نسبة ب س . ي ف :: ن . ق . فالشكل
ا س : د ف :: م : ن : ف ق

ليكن ن ف مسطح ن في ف . ونسبة م ن الى ف ق نتركب من نسبت م ن الى
ن ف ون ف الى ف ق (حد ١٠ ك ٥) . ولكن نسبة م ن الى ن ف هي نسبة م الى
ف (ق ١٥ ك ٥) لان م ن و ن ف مضروبان متساويان من م و ف . ولهذا السبب
ايضاً نسبة ن ف الى ف ق هي نسبة ن الى ق فنسبة م ن الى ف ق قد تركبت من

نسبة م الى ف ونسبة ن الى ق . وبالمفروض نسبة م الى ف هي نسبة الضلع ب س الى الضلع دى . ونسبة ن الى ق هي نسبة الضلع ب س الى الضلع دى ق فنسبة م ن الى ف ق قد تركبت من نسبة ا ب الى دى ونسبة ب س الى دى ف . ونسبة الشكل اس الى الشكل د ف قد تركبت من هذه النسب ايضا (ق ٢٢ ك ٦) فالشكل اس الى الشكل ا د كسبة م ن مسطح العددين م ون الى ف ق مسطح العددين ف وق فرع اول . اذا كانت نسبة غ ح الى ك ل كسبة م الى ح ————— غ
ن فالمرجع المرسوم على ع ح الى المربع على ك ل كنسبة م م ل ————— ك
او مربع م الى ن او مربع ن

فرع ثان . اذا قُرِضَتْ خطوط مثل ا ب س د الى اخره واعداد مناسبة لها مثل م ن ر ص اي ا : ب :: م : ن : و : س :: م : ر : و : د :: م : ص . فاذا كان القائم الزوايا مسطح خطين من هذه الخطوط يعدل مربع الخط الثالث فسطح العددين المناسبين للاولين يعدل مربع العدد المناسب للثالث اي اذا كان $a \times s = b^2$ فينثي $m \times r = n^2$

وبالقلب اذا قُرِضَ م ور عددين مناسبين للخطين ا وس وقُرِضَ ان $a \times s = b^2$ ووجد عدد مثل ن حتى ان $n^2 = m \times r$ فينثي ا : ب :: م : ن

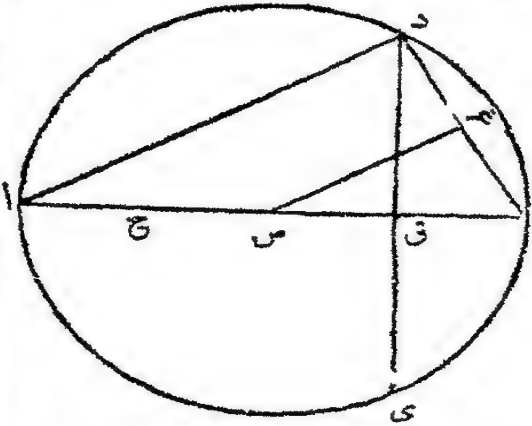
تعليقة . لكي نجد اعدادا مناسبة لعدة مقادير من جنس واحد لنفرض ان احدها قد انقسم الى اجزاء متساوية ولنفرض م عدد الاجزاء كلها وح جزءا من الاجزاء . ولنفرض ان ح يوجد ن مرة في المقارب ورمرة في المقارس و ص مرة في المقار د وهلم جرا الى اخره . فالامر واضح ان الاعداد م ن ر ص هي مناسبة للمقادير ا ب س د . فاذا قيل في القضايا الآتية ان خطا مثل ا = عددا مثل م يراد ان $a = m \times ح$ اي ان ا يعدل المقدار المفروض ح مضروبا في م وهكذا في المقادير الاخرى س د والاعداد المناسبة لها لان ح انما هو قياس مشترك للكل . وقد يترك ذكر هذا القياس المشترك للاختصار ولكنه متضمن في المعنى كما قيل ان خطا او مقدارا هندسيا يعدل عددا ما . واذا كان في ذلك العدد كسرا او كان مختلطاً يراد ان القياس المشترك ح قد انقسم الى اجزاء يُدَلُّ عليها بالكسر . فلو قيل $a = ٢٦٠٠٤٢٧٥$ يراد انه يوجد ح حتى ان $٢٦٠٠٤٢٧٥ = ح \times ٢٦٠٠٤٢٧٥$ وهكذا

كل ما دلّ على نسب مفاد بر هندسية بواسطة اعداد

القضية الثامنة. ن

العمود من مركز دائرة على وتر قوس من الدائرة هو متناسب متوسط بين ربع القطر وخط مركب من نصف القطر مع عمود من المركز على وتر مضاعف القوس. ووتر القوس هو متناسب متوسط بين القطر وخط هو فضلة نصف القطر والعمود المذكور من المركز

ليكن ا ب د دائرة مركزها س ود ب ي قوساً ما ود ب نصفه. ارسم الوترين



دي د ب وايضاً س ق عموداً على

دي وس ع عموداً على د ب وليخرج

س ق حتى يلاقي المحيط في ب وا.

نصف اس في ح. فالعمود س ع هو

متناسب متوسط بين ا ح و ا ق. و ب د

متناسب متوسط بين ا ب و ب ق

الذي هو فضلة نصف القطر وس ق

ارسم ا د فلكون ا د ب قائمة لانها في نصف دائرة وس غ ب ايضاً قائمة فالمثلثان

ا ب د س ب غ متساويا الزوايا و ا ب : ا د :: ب س : س غ (ق ٤ ك ٦) وبالمبادلة

ا ب : ب س :: ا د : س غ ولكن ا ب هو مضاعف ب س فيكون ا د مضاعف

س غ ومربع ا د يعدل اربعة امثال مربع س ع

ولكون ا د ب مثلثاً ذا قائمة ود ق عموداً من القائمة على ا ب فالضلع ا د

متناسب متوسط بين ا ب و ا ق (ق ٨ ك ٦) و ا د^٢ = ا ب × ا ق (ق ١٧ ك ٦) او

لكون ا ب = ا ح ا د^٢ = ا ح × ا ق. ولكون ا د^٢ = ا ب × ا ق = ا ح × ا ق

ا ح × ا ق وس غ^٢ = ا ح × ا ق فاداً س غ هو متناسب متوسط بين ا ح و ا ق

اي بين ربع القطر والخط المركب من نصف القطر والعمود على مضاعف القوس ب د

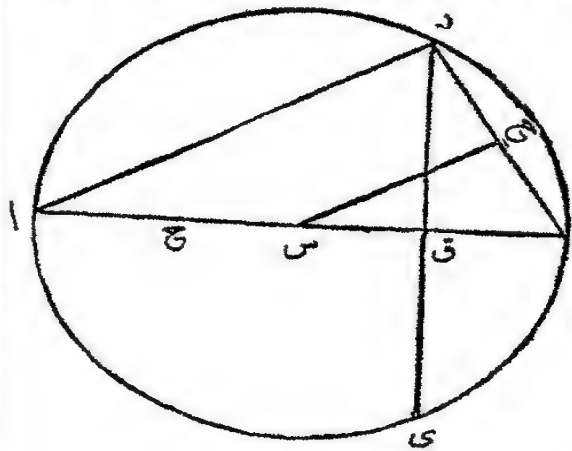
والامر واضح ان ب د هو متناسب متوسط بين ا ب و ب ق (ق ٨ ك ٦) اي

بين القطر وفضلة نصف القطر والعمود على وتر قوس مضاعف القوس د ب

القضية التاسعة من

محيط الدائرة هو اطول من ثلاثة امثال قطرها بخط اقصر من $\frac{1}{7}$ من القطر واطول من $\frac{1}{11}$ من القطر

ليكن ا ب د دائرة مركزها س وقطرها ا ب فالحيط اطول من ا ب بخط اقصر من $\frac{1}{7}$ او $\frac{1}{11}$ من ا ب واطول من ا ب



ارسم في الدائرة ا د ب الخط المستقيم ب د حتى يعدل نصف القطر ب س (ق ا ك ٤) ارسم د ق عموداً على ب س واخرجه حتى يلاقي المحيط ايضا في ي وارسم س ج عموداً على ب د. اخرج ب س الى ا وتصف ا س في ح وارسم س د

فالامر واضح ان كل واحد من القوسين ب د ب ي هو سدس المحيط (فرع ق ا ك ٤) فالقوس د ب ي ثلث المحيط. فالخط س ج متناسب متوسط بين ا ح ربع القطر والمحيط ا ق (ق ا ك ٨ مضافات). ولكون الضلعين ب د د س متساويين فالزاويتان د س ق د ب ق متساويتان. و د ق س د ق ب متساويتان ايضا والضلع د ق مشترك بين المثلثين د ب ق د س ق فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة س ق فتد نصف س ب في ق فاذا فرض ان ا س ا ب س = ١٠٠٠ فحينئذ ا ح = ٥٠٠ وس ق = ٥٠٠ وا ق = ١٥٠٠ وس ج متناسب متوسط بين ا ح وا ق اي س ج = ا ح > ا ق (ق ا ك ٦) = ١٥٠٠ > ٥٠٠ = ٧٥٠٠٠٠ وس ج = ٨٦٦٤٠٢٥٤ لان (١٦٦٤٠٢٥٤) اقل من ٧٥٠٠٠٠ وايضا ا س + س ج = ١٨٦٦٤٠٢٥٤

ولكون س ج عموداً من المركز س على وتر سدس المحيط فاذا فرض ف = العمود من س وتر ا ب من المحيط يكون ف متناسباً متوسطاً بين ا ح و ا س + س ج

(ق ۸ ك ۱ مضافات) وف^۱ = ا ح × (اس + س ج) = ۰۰۰ × (+ ۰۲۵۴) = ۱۸۷۷ = + ۱۲۰۷۲۳۰ وف = + ۹۲۵۸۰۹۷۰ اس + ف = ۱۹۷۰

ثم اذا قُرض ر = العود من س على وتر^٢ من المحيط فحينئذ يكون ر متناسباً
متوسطاً بين ا ح و ا س + ف و ر = ا ح × (ا س + ف) = ٥٠٠ × (٩٢٥٨ + ٩٢٥٨)
١٩٦٥ = (٩٨٢٩٦٢ + ٩٨٢٩٦٢) و ر = ٩٨٢٩٦٢ + ٩٨٢٩٦٢ = ١٩٦٥

ثم اذا قُرِئ ص = العود من س على وتر: من المحيط فحينئذ ص = اح ×
 (اس + ر) = ٥٠٠ × + ١٩٩١ × ٤٤٤٩ + ٤٥٠ × ٩٩٥٧٢٢ = ص
 + ٩٩٧ × ٨٥٨٩ + ١٩٩٧ × ٨٥٨٩ + = ص

أخيراً اذا فُرض ط = العمود من س على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط فحينئذ ط² = اح
 $\times (اس + ص) = 500 \times (199748089 +) = 998929420 +$ وط =
 $999426408 +$ اي اذا انقسم نصف القطر الى 1000 جزء فالعمود من
 المركز على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط هو اطول من 999426408 من تلك الاجزاء
 ولكن حسب القضية السابقة وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط هو متناسب متوسط بين
 المحيط وفضلة نصف القطر وص اي العمود من المركز على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط . فبرع
 وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط = اب $\times (اس - ص) = 2000 \times (341411 -) = 682822 -$
 4282 والوتر ذاته = $682822 -$ لان (6042387) أكثر من 4282
 ووتر $\frac{1}{2}$ من المحيط او ضاع شكل متساوي الاضلاع ذي 96 ضلعاً في الدائرة اذا
 كان $682822 -$ يكون محيط ذلك الشكل (6042387) $\times 96 =$
 578241056-

ليكن م محيط شكل يشبه المتقدم ذكره محيط بالدائرة ثم (فرع ٢ ق ٢ ك ٥ مضافات) ط : اس :: - ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : م ولكن ط = + ٩٩٩٤٦٤٥٨ فلا + ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: - ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : م فاذا فرض مقدار اخر ن حتى تكون نسبة ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: - ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ن فاذا (ق ٢٣ ك ٥) + ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ن : م ولكون الاول اكبر من الثاني فالثالث اكبر من الرابع اي ن < م فاذا استعمل متناسب رابع لهذه

الاعداد ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ و ١٠٠٠ و ٦٢٨٢٤١٠٥٦ و ٦٢٨٥٤٤٦١ -

فلنا ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٥٤٤٦١ وحسبنا

نقدم ٩٩٩٤٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ن فلنا ايضاً

٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٢٤١٠٥٦ - :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٥٤٤٦١ - ن ولان الاول

أكبر من الثاني فالثالث أكبر من الرابع اي - ٦٢٨٥٤٤٦١ < ن وقد تبرهن

ان ن < م فاذا ٦٢٨٥٤٤٦١ أكبر من م محيط الشكل المحيط بالدائرة ذي

الستة والتسعين ضلعاً اي محيط ذلك الشكل هو اقل من ٦٢٨٥٤٤٦١ ومحيط

الدائرة اقل من محيط الشكل ذي الاضلاع الكثيرة المحيط بها فبالبحري محيط الدائرة

اقل من ٦٢٨٥٤٤٦١ فاذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اقل

من ٦٢٨٥٤٤٦١ من تلك الاقسام فيبين المحيط والقطر تناسب اصغر (ق ٨ ك ٥)

من تناسب ٦٢٨٥٤٤٦١ الى ٢٠٠٠ او من تناسب ٢١٤٢٠٧٢٠٥ الى ١٠٠٠

ولكن تناسب ٢٢ الى ٧ هو اعظم من تناسب ٢١٤٢٠٧٢٠٥ الى ١٠٠٠ اي

اذا انقسم القطر الى سبعة اقسام يكون المحيط اقل من ٢٢ قسماً منها

بقي علينا ان نبرهن ان زيادة المحيط على القطر هي أكثر من $\frac{1}{11}$ من القطر

قد تبرهن سابقاً ان س ج = ٧٥٠٠٠٠ وس ج = - ١٨٦٦٤٠٢٥٤٥ فاذا

اس + س ج = - ١٨٦٦٤٠٢٥٤٥ . ليكن ف كما تقدم عموداً من المركز على

وتر $\frac{1}{11}$ من المحيط فلنا

ف = ا ح × (ا س + س ج) = ٥٠٠ × (- ١٨٦٦٤٠٢٥٤٥) = -

١٩٦٥٤٩٢٥٨٥ وف = - ٩٦٥٤٩٢٥٨٥ واس + ف = - ١٩٦٥٤٩٢٥٨٥

ثم ليكن ر العمود من المركز

على وتر $\frac{1}{11}$ من المحيط فلنا ر =

ا ح (ا س + ف) = ٥٠٠ × (-

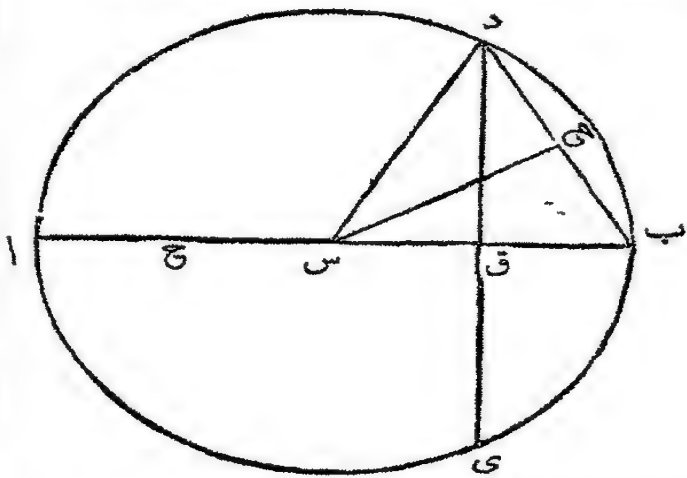
- ١٩٦٥٤٩٢٥٨٥) = -

٩٨٢٩٦٢٤٩٣ ور = -

٩٩١٤٤٤٩٥ واس + ر = -

١٩٩١٤٤٤٩٥

ليكن ص العمود من المركز



على وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط فلنا ص^٢ = اح × (اس + ر) = ٥٠٠ × (-)
 ٩٩٧٤٨٥٨٩٥ - = ٩٩٥٧٢٢٢٤٧٥ - = ٩٩١٤٤٤٩٥
 ثم ان مربع وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط = اب × (اس - ص) = ٢٠٠٠ ×
 (+) ٢٤١٠٥ = ٢٨٢٤١ + . والوتر ذاته = ٦٥٤٣٧٧ + ٦٥٤٣٧٧
 (٦٥٤٣٧٧) اقل من ٢٨٢٤١. وإذا كان وتر $\frac{1}{4}$ من المحيط + ٦٥٤٣٧٧
 فمحيط شكل ذي ٩٦ ضلعاً متساوياً في الدائرة = (٦٥٤٣٧٧ +) × ٩٦ =
 ٦٢٨٢٤٠١٩ ومحيط الدائرة اطول من محيط الشكل فيها فاذا انقسم نصف القطر
 الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط أكثر من ٦٢٨٢٤٠١٩ من تلك الاقسام. وإذا انقسم
 نصف القطر الى ٥٠٠ قسم يكون المحيط أكثر من ٣١٤١٤٠٠٩ من تلك الاقسام
 ولكن تناسب ٣١٤١٤٠٠٩ الى ١٠٠٠ هو اعظم من تناسب $\frac{1}{4}$ + ٣ الى واحد
 فتناسب محيط الدائرة الى قطرها هو اعظم من تناسب $\frac{1}{4}$ + ٣ الى واحد اي فضلة
 المحيط وثلاثة امثال القطر هي أكثر من $\frac{1}{4}$ من القطر وقد تبرهن انها اقل من $\frac{1}{4}$
 من القطر

فرع اول. اذا فرض قطر دائرة نستعلم المحيط هكذا ٢٢ : ٧ :: القطر : كمية
 رابعة أكبر من المحيط و ١ : ٣ + $\frac{1}{4}$ او ٧١ : ٢٢٢ :: القطر : كمية رابعة اصغر من
 المحيط

فرع ثان. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ فضلة الخطين المستعملين هي $\frac{1}{4}$ من القطر فضلة
 المحيط واحدها اقل من $\frac{1}{4}$ من القطر

فرع ثالث. نسبة ٢٢ : ٧ :: مربع نصف القطر : مساحة الدائرة تقريباً. لان قد
 تبرهن سابقاً (فرع اول ق ٥ ك ١ مضافات) ان نسبة قطر دائرة الى محيطها كربع
 نصف القطر الى مساحتها ولكن نسبة القطر الى المحيط كنسبة ٢٢ : ٧ تقريباً فربع
 نصف القطر الى المساحة كمهذه النسبة المذكورة تقريباً

تعليقة

كلما تعددت اضلاع الشكل في الدائرة والشكل المحيط بها قلت الفضلة بينهما
 وبين احدها والمحيط كما يرى من هذا الجدول الذي فيه حُسِبَ نصف القطر واحداً

عدد الاضلاع	محيط الشكل في الدائرة	محيط الشكل حول الدائرة
٦	٦٠٠٠٠٠٠	٦٠٨٢٢٠٣٣—
١٢	٦٠٢١١٦٥٧+	٦٠٤٣٠٧٨١—
٢٤	٦٠٢٦٥٢٥٧+	٦٠٣١٩٣٢٠—
٤٨	٦٠٢٧٨٧٠٠+	٦٠٢٩٢١٧٣—
٩٦	٦٠٢٨٢٠٦٣+	٦٠٢٨٥٤٣٠—
١٩٢	٦٠٢٨٢٩٠٤+	٦٠٢٨٣٧٤٧—
٣٨٤	٦٠٢٨٣١١٥+	٦٠٢٨٣٣٢٧—
٧٦٨	٦٠٢٨٣١٦٧+	٦٠٢٨٣٢٣١—
١٥٣٦	٦٠٢٨٣١٨٠+	٦٠٢٨٣١٩٥—
٣٠٧٢	٦٠٢٨٣١٨٤+	٦٠٢٨٣١٨٨—
٦١٤٤	٦٠٢٨٣١٨٥+	٦٠٢٨٣١٨٦—

فبى فصلة المحيطين اقل من واحد في المبرلة السادسة من الكسور العشرية اي اقل من $\frac{1}{1000000}$ من نصف القطر فالخطا في معرفة محيط الدائرة هو اقل من $\frac{1}{1000000}$ من نصف قطرها فاذا فرض $n =$ نصف القطر فالخطا هو اكثر من $n \times 24141092$ او من 24141092×2 واقل من 24141092×3 وفضلتهما اما هي $\frac{1}{1000000}$ من نصف القطر

وهكذا 24141092×2 اقل مساحة الدائرة و 24141092×3 اكثر من مساحة الدائرة وفصلتهما هي $\frac{1}{1000000}$ من مربع نصف القطر. وعلى هذا الاسلوب يتقرب الى الصحيح اكثر مما تقدم ولكن الى الآن لم توجد نسبة القطر الى المحيط تمامًا

اصول الهندسة

مضافات

الكتاب الثاني

في تقاطع السطح

حدود

١ الخط المستقيم العمودي على سطح هو ما احده راوثة قائمة مع كل خط مستقيم في ذلك السطح

٢ اذا تقاطع سطحان وكانت كل المخطوط المستقيمة في احدهما العمودية على خط التقاطع عمودية ايضاً على السطح الاخر فالسطح الاول عمودي على الثاني

٣ ميل خط مستقيم على سطح هو الراوثة المحاذية له بين ذلك الخط وخط اخر مستقيم مرسوم من ملتقى الخط الاول بالسطح الى ملتقى السطح وعمودي عليه من اية نقطة كانت في الخط الاول

٤ الزاوية بين سطحين يتقاطعان في المحاذية بين خطين مستقيمين بين كل واحد منهما في سطح من السطحين وكل واحد منهما عمودي على خط تقاطعهما ومن الراويتين المتوازيين المحاذيتين من ذلك فالمحاذية هي ميل احد السطحين الاخر

٥ اذا عدلت الراوثة المذكورة المحاذية بين سطحين الراوثة المحاذية بين سطحين آخرين يقال ان ميل الاولين مثل ميل الاخرين

٦ الخط المستقيم المراري سطحاً هو الذي لا يلاقي السطح ولو أخرج على استقامته الى سيرته نهاية

- ٧ السطوح المتوازية هي التي لا تتلاقى ولو امتدت الى غير نهاية
 ٨ الزاوية المجسمة هي الحادثة من التقاء ثلاث زوايا بسيطة فاكثر ليست في
 سطح واحد

القضية الاولى . ن

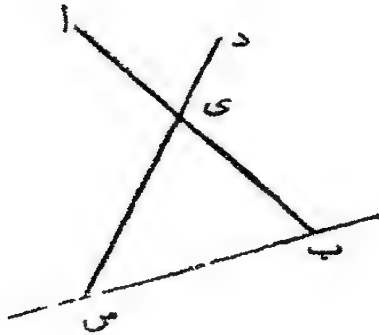
لا يكون قسم من خط مستقيم في سطح وقسم اخر منه فوق ذلك
 السطح

ان كانت ممكنا ليكن ا ب س خطا مستقيما وليكن القسم ا ب منه في سطح
 والقسم ب س منه فوق السطح . فليكون ا ب في
 سطح فيمكن اخراجه في ذلك السطح (اولى
 المقترضات ك ا) فليخرج الى د فيكون ا ب س
 ا ب د خطين مستقيمين لهما قسم مشترك ا ب
 وذلك غير ممكن (فرع حد ٢ ك ا) فلا يكون ا ب س خطا مستقيما



القضية الثانية . ن

اذا التقت ثلاثة خطوط مستقيمة في غير نقطة واحدة فهي في سطح واحد
 لتتلاق الخطوط الثلاثة المستقيمة ا ب ب س س د في النقطة ي ب س
 فهي في سطح واحد



ليمر سطح بالخط المستقيم ي ب وليد السطح
 على ب ي حتى يمر بالنقطة س . فليكون ي وس
 في هذا السطح يكون الخط ي س فيه ايضا وقد
 فرض ان ي ب فيه فالخطوط الثلاثة ي ب
 ب س س ي هي في السطح الواحد وهي اقسام من
 ا ب ا ب س س د ولا يكون قسم من خطين

إذا تقاطع سطحان فموضع التقاطع هو خط مستقيم

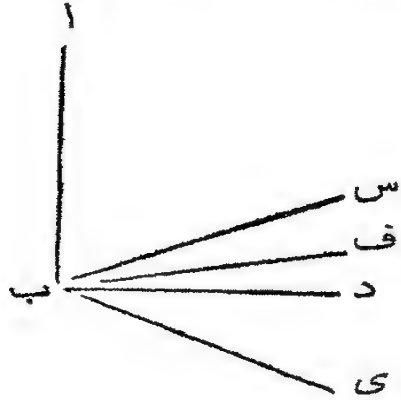
إذا كان خطٌ مستقيم عموداً على خطين مستقيمين على ملتقاها فهو عمود على السطح الذي فيه الخنطان

ق غ = غ د فالخط ق د قد تصف في غ. ولان ب ا د قائمة ب د = ب ا + ا د
(ق ٤٧ ك ١) وب ق = ب ا + ا ق وب د = ب ق + ق د = ب ا + ا ق + ا د + ا ق = ب ا ق + ا ق د.
ولان د ق قد نصف في غ (ق ١ ك ٢) ا د = ا ق + ا غ + ا غ ق فاذا ب د +
ب ق = ب ا + ا ب + ا غ + ا غ ق ولكن ب د = ب ق + ق د = ب ق + ا غ ق + ا غ ق + ا غ ق
(ق ١ ك ١) فاذا ا ب ع + ا غ ق = ا غ ق + ا غ ق + ا غ ق + ا غ ق + ا غ ق + ا غ ق
من المحابين فيبقى ا ب ع = ا ب + ا غ ق + ا غ ق + ا غ ق + ا غ ق + ا غ ق فتكون
ب ا غ قائمة (ق ٤٨ ك ١) واع هو في السطح الذي فيه ا د واق والخط العمودي
على خط ب ع سطح ما هو عمودي على ذلك السطح (حد ١ ك ٢ مضافات) فالخط
ا ب هو عمود على سطح الخط ا ق ا د

القضية الخامسة. ن

اذا تلاقت ثلاثة خطوط مستقيمة في نقطة واحدة وكان خط آخر
مستقيم عموداً على الثلاثة في تلك النقطة فالخطوط الثلاثة في سطح
واحد

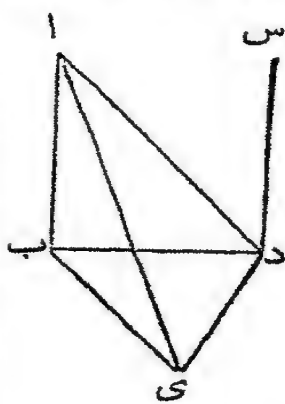
ليكن ب س ب د ب ي ثلاثة خطوط مستقيمة متلاقية في النقطة ب وليكن
ب ا عموداً عليها في تلك النقطة فهذه الخطوط الثلاثة
هي في سطح واحد
والا فان كان ممكناً ليكن ب د وب ي في سطح
وب س فوقه وليمر سطح في ا ب وب س وليكن
موضع تقاطع مع السطح الذي فيه ب د وب ي
خطاً مستقيماً (ق ٢ ك ٢ مضافات) وليكن ب ف
ذلك الخط فالخطوط الثلاثة المستقيمة ا ب ب س
ب ف هي في سطح واحد اي الذي يمر في ا ب وب س. ولكون ا ب عموداً على كل
من الخطس المستقيمين ب د ب ي وهو عمود على السطح المار فيهما (ق ٤ ك ٢ مضافات)
وهو عمود على كل خط في ذلك السطح وب ف هو في السطح الذي يلاقيه فالزاوية



ا ب ف قائمة وقد فُرض ان ا ب س قائمة فالزاوية ا ب ف = ا ث س وها في سطح واحد وذلك لا يمكن فالخط المستقيم ب س ليس فوق السطح الذي فيه ب د وب ي فالخطوط الثلاثة المستقيمة ب س ب د ب ي في سطح واحد

القضية السادسة. ن

خطان مستقيمان عمودان على سطح واحد هما متوازيان
ليكن الخطان المستقيمان ا ب وس د عمودين على السطح ب ي د فهما متوازيان

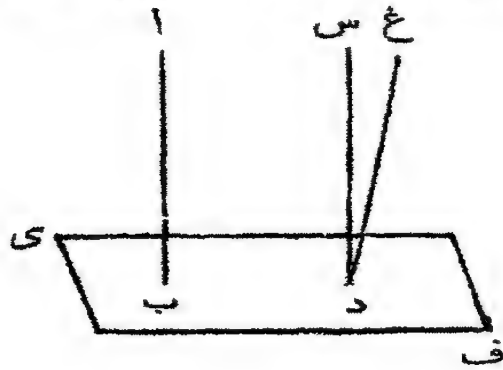


ليلاقيا السطح في النقطتين ب ود. ا رسم د ي عموداً على د ب في السطح ب د ي ولتكن ي نقطة ما فيه. ا رسم ا ي ا د ي ب. فلكون ا ب ي قائمة ا ب' + ب ي' = ا ي' (ق ٤٧ ك ١) ولكون ب د ي قائمة ب ي' = ب د' + د ي' فاذا ا ب' + ب د' + د ي' = ا ي' و ا ب' + ب د' = ا د' فاذا ا د' + د ي' = ا ي' فتكون ا د ي قائمة (ق ٤٨ ك ١) فالخط ي د هو عمود على الخطوط الثلاثة ب د د ا

د س فهي في سطح واحد (ق ٥ ك ٢ مضافات) و ا ب هو في السطح الذي فيه ب د ود الان كل ثلاثة خطوط متلاقية هي في سطح واحد (ق ٢ ك ٢ مضافات) فاذا ا ب ب د د س في سطح واحد وكل واحد من الراويين ا ب د ب د س قائمة فالخط ا ب يوازي الخط س د (ق ٢٨ ك ١)

القضية السابعة. ن

اذا كان خطان مستقيمان متوازيين وكان احدهما عموداً على سطح
فالاخر ايضاً عمود على ذلك السطح
ليكن ا ب وس د خطين متوازيين وليكن احدهما ا ب عموداً على سطح ي ف



فيكون س د ايضاً عموداً عليه
وان لم يكن س د عموداً على السطح الذي
اب عمود عليه فليكن د غ عموداً عليه فاذا
د غ يوازي اب (ق ٦ ك ٢ مضافات) وكلا
د س د غ يوازي اب وقد رُسم من نقطة
واحدة وذلك غير ممكن (اولية ١١ ك ١)

القضية الثامنة . ن

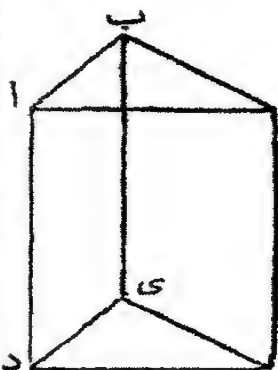
خطان مستقيمان يوازيان خطاً ثالثاً مستقيماً هما متوازيان وان لم تكن
في سطح واحد

لنفرض ان الخطين المستقيمين اب وس د يوازيان الخط المستقيم ي ف وهو
ليس في سطحهما فالخط اب يوازي الخط س د
في ي ف خذ آية نقطة شئت مثل غ ومنها
ارسم الخط المستقيم غ ح في السطح المار بالخطين
اب ي ف وليكن غ ح عموداً على ي ف
غ ك عموداً على ي ف في السطح الذي ير
بالخطين ي ف س د . ولكون ي ف عموداً على ح غ وك غ فهو عمود على السطح
الماز بهما ح غ ك (ق ٤ ك ٢ مضافات) وي ف يوازي اب فاذا اب هو عمود على
السطح ح غ ك (ق ٧ ك ٢ مضافات) ولهذا السبب س د عمود على السطح ح غ ك
فكلا اب وس د عمود على سطح واحد فهما متوازيان (ق ٦ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة . ن

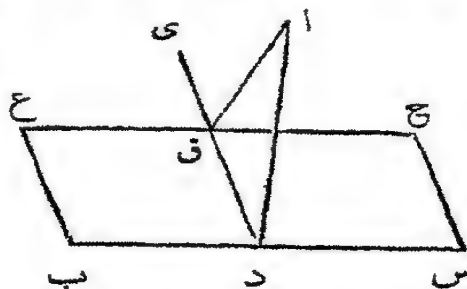
اذا تلاقي خطان مستقيمان ووازي خطين آخرين مستقيمين متلاقين
وليسا في سطح الاولين فالزاوية الحادثة بين الاولين تعدل الحادثة
بين الآخرين

ليكن $ا ب س ب$ خطين مستقيمين وليتلاقيا في $ب$ وليوازيا خطين آخرين
 مستقيمين $د ي ف ي$ الملتقيين في $ي$ وليسا في سطح
 الاولين فالزاوية $ا ب س$ تعدل الزاوية $د ي ف$. اقطع $س$
 الاقسام المتساوية $ب ا ب س ي ي ف$ وارسم $ا د$
 $ب ي س ف ا س د ف$. فلكون $ب ا = ي د$ وبوازيه
 فالخط $ا د = ب ي$ وبوازيه (ق ٢٢ ك ١) ولهذا السبب
 $س ف = ب ي$ وبوازيه فاذا $ا د = س ف$ وبوازيه $ف$
 (ق ٨ ك ٢ مضافات) و $ا س = د ف$ وبوازيه (ق ٢٢ ك ١) فلكون $ا ب و ب س$
 يعدلان $د ي و ي ف$ والقاعدة $ا س = القاعدة د ف$ فالزاوية $ا ب س = الزاوية$
 $د ي ف$ (ق ٨ ك ١)



القضية العاشرة. ع

علينا ان نرسم عموداً على سطح من نقطة مفروضة فوقه
 لتكن $ا$ النقطة المفروضة وب $ح$ السطح المفروض. علينا ان نرسم عموداً على
 ب ح من النقطة $ا$



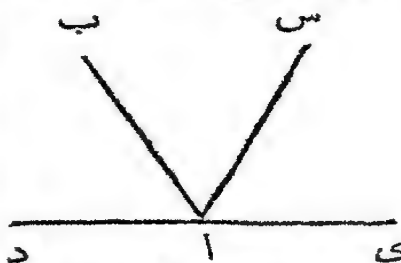
ارسم في السطح $اي$ خطاً مستقيماً شئت
 مثل $ب س$ ومن $ا$ ارسم $ا د$ عموداً على
 ب س (ق ١٢ ك ١) فاذا كان $ا د$ عموداً
 على السطح ب ح ايضاً فقد تم العمل. ولا
 فمن النقطة $د$ ارسم الخط المستقيم $د ي$ في السطح ب ح واجعله عموداً على ب س.
 ومن $ا$ ارسم $ا ق$ عموداً على $د ي$. وفي $ق$ ارسم $ق ح$ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١)
 فلكون ب س عموداً على $د ا$ وعلى $د ي$ فهو عمود على السطح المار بهما (ق ٤
 ك ٢ مضافات) و $ق ح$ يوازي ب س فهو ايضاً عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢
 مضافات) وهو عمود على كل خط مستقيم في ذلك السطح (حد ١ ك ٢ مضافات)
 ويلاقيه $ا ق$ الذي هو في السطح المذكور اي المار بالخطين $ا د و د ي$ فاذا $ا ق$ عمود
 على $ق ح و د ي$ على موضع التقائهما فهو عمود على سطحهما (ق ٤ ك ٢ مضافات) وذلك
 السطح هو ب ح فقد رُسم $ا ق$ عموداً على السطح ب ح من النقطة المفروضة

فرع. لو فرض ان يرسم عمود على سطح من نقطة فيه مثل س فعين نقطة فوقه
مثل ا وارسم اق عموداً على السطح ومن س ارسم خطاً حتى يوازي اق فيكون عموداً
على السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات)

القضية الحادية عشرة. ن

من نقطة واحدة في سطح لا يكون خطان مستقيمان عمودين على ذلك
السطح على جانب واحد منه. ومن نقطة فوقه لا يكون اكثر من خط
واحد عموداً عليه.

ان كان ممكناً ليكن اس اب عمودين على سطح مفروض على نقطة واحدة منه



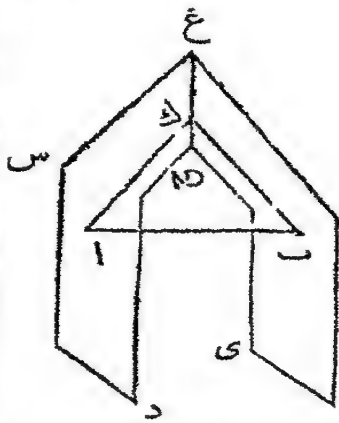
هي ا وعلى جانب واحد منه وليرسم سطح بهذين
الخطين ب ا س افعل نقاط هذا السطح بالسطح
المفروض هو خط مستقيم ماراً بالنقطة ا (ق ٢ ك ٢
مضافات) ليكن د ا ي محل التقاطع فالخطوط

المستقيمة ب ا س ا د ا ي هي في سطح واحد. ولكون س ا عموداً على السطح
المفروض فهو عمود على كل خط مستقيم يلاقيه في ذلك السطح فالزاوية س ا ي
قائمة ولهذا السبب ايضاً ب ا ي قائمة وهما في سطح واحد وذاك غير ممكن. ومن
نقطة مفروضة فوق السطح لا يكون الا خط واحد عموداً على السطح والا لكانا
متوازيين (ق ٦ ك ٦ مضافات) وذاك محال

القضية الثانية عشرة. ن

اذا كان خط مستقيم عموداً على سطوح فتلك السطوح متوازية

ليكن الخط المستقيم اب عموداً على السطحين س د ي ف فهما متوازيان

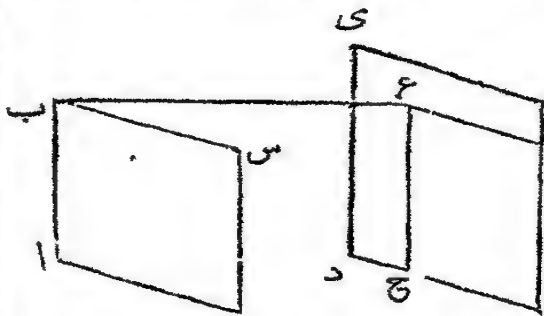


والأفلا بد من التقائهما إذا أُخرجَا ويكون محل
نقاطعهما خطاً مستقيماً غ ح . خذ في غ ح اية نقطتي شئت
مثل ك وارسم اك ب ك . فلكون اب عموداً على
السطح ي ف فهو عمود على كل خطٍ مستقيم يلاقيه في
ذلك السطح (حد ا ك ٢ مضافات) فهو عمود على
ب ك وك ب قائمة . ولهذا السبب ايضاً ب ا ك قائمة
ففي المثلث ك ا ب قائمتان وذاك غير ممكن (ق ١٧
ك ا) فالسطحان لا يتلاقيان ولو أُخرجَا فهما متوازيان (حد ٧ ك ٢ مضافات)

القضية الثالثة عشرة . ن

إذا كان خطان مستقيمان ملتقيان موازيين لخطين مستقيمين آخرين
اللذين يلتقيان ايضاً وليسا في سطح الاولين فالسطح المارّ بالاولين
يوازي المارّ بالآخرين

ليكن ا ب ب س خطين مستقيمين ولتلاقيا في ب وليوازي خطين آخرين
مستقيمين ليسا في سطحهما د ي ف ي
اللذين يتلاقيان في ي . فالسطح المارّ
بالاولين يوازي المارّ بالآخرين
من ب ارسم ب غ عموداً على
السطح المارّ بالخطين د ي ي ف

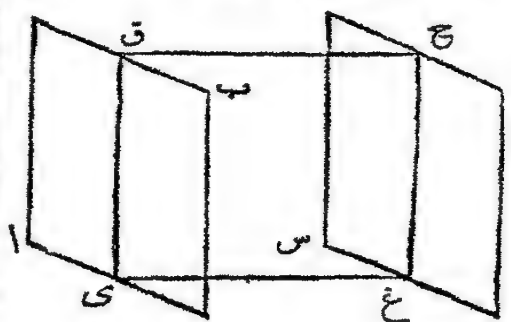


(ق ١٠ ك ٢ مضافات) وليلاق في ع ومن غ ارسم غ ح حتى يوازي د ي (ق ٢١
ك ا) وغ ك حتى يوازي ف ي . فلكون ب ع عموداً على سطح د ي ي ف فهو عمود
على كل خطٍ يلاقيه في ذلك السطح (حد ا ك ٢ مضافات) فتكون كل واحدة من
الزاويتين ك ع ب ح غ ب قائمة . ولكون ب ا يوازي ع ح (ق ٨ ك ٢ مضافات)
فالزاويتان ح غ ب ا ب غ معاً تعدلان قائمتين وح ح ب قائمة فتكون ا ب غ
ايضاً قائمة وغ ب عمود على ب ا ولهذا السبب ايضاً هو عمود على ب س . فهو عمود

على السطح المائل بها وقد رُسم عموداً على سطح دى ي ف فهو عمود على السطحين
فهما متوازيان (ق ١٢ ك ٢ مضافات)
فرع. اذا لاقى خطاً مستقيماً سطحين متوازيين وكان عموداً على احدهما فهو عمود
على الثاني ايضاً

القضية الرابعة عشرة. ن

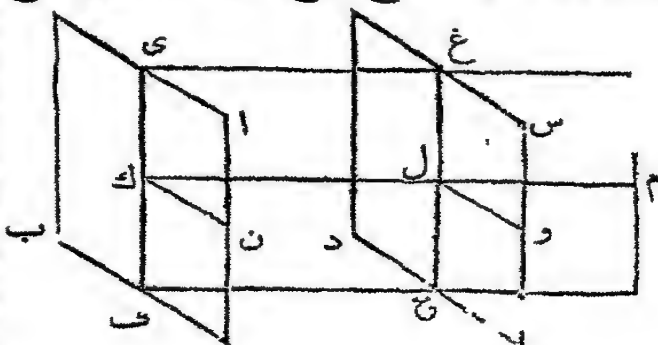
اذا قطع سطح^٢ سطحين متوازيين فخطا التقاطع متوازيان
ليكن ا ب وس د سطحين متوازيين وليقطعهما السطح ي ق غ ح فخطا التقاطع
ي ق غ ح متوازيان



لأن الخط ي ق في السطح ا ب د
والخط غ ح في السطح س د وكل واحد
يبقى في سطحيهما أخرج والسطحان
لا يلتقيان لانها متوازيان فالخطان
لا يتلاقيان ولو أخرجا فهما متوازيان
(حد ٢٠ ك ١)

القضية الخامسة عشرة. ن

اذا قطع سطح^٢ سطحين متوازيين فلها ميل واحد على ذلك السطح
ليكن ا ب وس د سطحين متوازيين وليقطعهما السطح ي ق غ ح فيل ا ب على ي ح
هو مثل ميل س د على ي ح

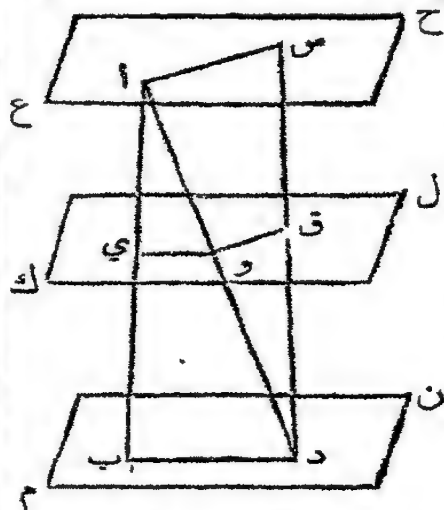


ليكن الخطان المستقيمان
ي ف و غ ح موضعي التقاطع.
من آية نقطة شئت في ي ف مثل
ك ارسم الخط ك م في السطح ي ح
عموداً على ي ف وليلاقي غ ح في
ل وارسم ك ن عموداً على ي ف في السطح ا ب وليمر سطح بالخطين المستقيمين ك ن

ك م حتى يقطع السطح س د في الخط ل و. فلكون السطح ح ي يلاقي السطحين المتوازيين ا ب س د في الخطين ح ي ف غ ح فهذان الخطان متوازيان (ق ٤ ك ٢ مضافات) وى ق انما هو عمود على السطح المار بالخطين ك ن ك م (ق ٤ ك ٢ مضافات) لانه عمود على ك ن وك م فالخط غ ح ايضا عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات) فهو عمود على الخطين ل م ل و اللذين بلاقيانه في ذلك السطح. ولان ل م ل و عمودان على ل غ محل تقاطع السطحين س د وى ح فالزاوية ول م هي ميل السطح س د على السطح ح (ق ٤ ك ٢ مضافات) وهكذا ايضا م ك ن هي ميل السطح ا ب على السطح ح. ون ك يوازي ول فالزاوية الداخلة ن ك م تعدل الخارجة م ل و (ق ٢٩ ك ١) فميل السطح ا ب على ح يعدل ميل السطح س د على ح

القضية السادسة عشرة. ن

سطوح متوازية اذا قطعت خطين مستقيمين تقطعها على نسبة واحدة
ليكن غ ح ك ل م ن سطوحا متوازية ولتقطع الخطين المستقيمين ا ب س د
في النقاط ا ب س ق د فنسبة اى :



ى ب :: س ق : ق د
ارسم اس ب د ا د. واما ا د فليلاقي السطح
ك ل في و. ارسم ح ي و وق. فلان السطحين
المتوازيين ك ل م ن قد قطعها السطح ح ي ب د و
فخطا التقاطع ح ي و ب د متوازيان (ق ١٤ ك ٢
مضافات) وهكذا ايضا يبرهن ان اس و ق
متوازيان. ولكون ح ي و يوازي ب د ضلعاً من
المثلث ا ب د فنسبة اى : ح ي : ب :: ا و : و د (ق ٢ ك ٦) ولان ق و يوازي ب د
ضلعاً من المثلث ا د س فنسبة ا و : و د :: س ق : ق د فبالمساواة (ق ١١ ك ٥)
اى : ح ي : ب :: س ق : ق د

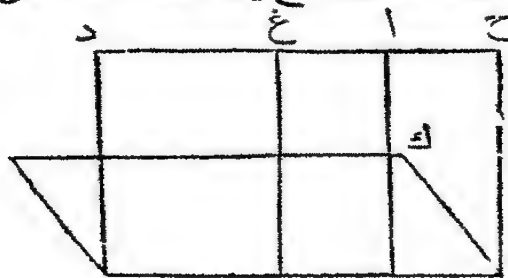
القضية السابعة عشرة. ن

اذا كان خطٌ مستقيمٌ عموداً على سطحٍ فكل سطحٍ مارٍ بذلك الخط

هو عمود على السطح الاول

ليكن الخط المستقيم اب عموداً على السطح س ك فكل سطح يمر بالخط اب هو

عمود على السطح س ك



ليمر سطح مثل دى في الخط اب

وليكن الخط س ي مثل تقاطع السطح

س ك. في س ي خذ ا ب نقطة شئت مثل ف

وفي السطح دى ارسم ف غ عموداً على س ي.

ولكون اب عموداً على السطح س ك فهو عمود على كل خط مستقيم يلاقيه في ذلك

السطح (حد ١ ك ٢ مضافات) فهو عمود على س ي واب ف قائمة و غ ف ب ايضاً

قائمة فاذا اب يوازي ع ف (ق ٢٨ ك ١) واب عمود على السطح س ك فالخط غ ف

ايضاً عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات) واب و غ ف في السطح دى

فالسطح دى عمود على السطح س ك (حد ٢ ك ٢ مضافات) وهكذا يبرهن ان كل

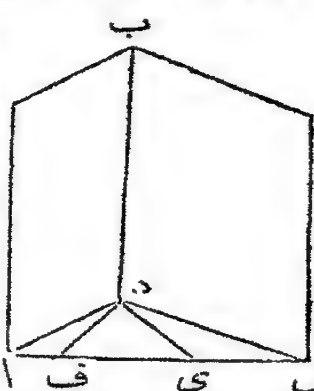
السطوح المارة بالخط اب عمودية على س ك

القضية الثامنة عشرة. ن

اذا تقاطع سطحان وكانا عموديين على سطح ثالث فخط تقاطعها هو

ايضاً عمود على ذلك السطح

ليكن اب وب س سطحين ولتقاطعا في الخط ب د وليكونا عموديين على



السطح ا د س فالخط ب د هو ايضاً عمود على ا د س

من د في السطح ا د س ارسم دى عموداً على ا د

ود ف عموداً على د س. فليكون دى عموداً على د ا

خط تقاطع السطحين اب ا د س واب عموديه على

ا د س فالخط دى عمود على السطح اب (حد ٢ ك ٢

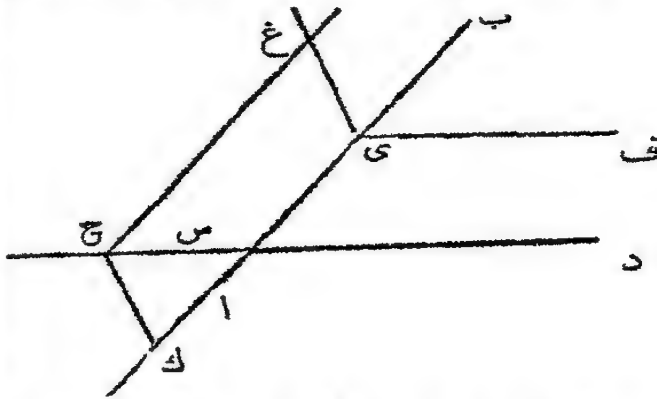
مضافات) فهو ايضاً عمود على الخط ب د الذي في ذلك

السطح (حد ١ ك ٢ مضافات) وهكذا ايضاً يبرهن ان د ف عمود على د ب فالخط
د ب عمود على د ي ود ف فهو عمود على سطحها اي على ا د س (ق ٤ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة عشرة. ع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خطين مستقيمين مفروضين وضعاً
وليسا في سطح واحد

ليكن ا ب وس د الخطين ولا يكونا في سطح واحد. علينا ان نرسم عموداً عليهما



في ا ب خذ نقطة ي ومن
ي ارسم ي ف حتى يوازي س د
وليكن ي غ عموداً على السطح
المائر بالخطين ي ب ي ف
(ق ١٠ ك ٢ مضافات) ولير
السطح غ ك بالخطين ا ب و غ ي

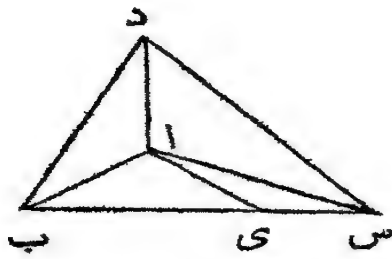
وليلاق س د في ح ومن ح ارسم ح ك عموداً على ا ب فالخط ح ك هو المطاوب
من ح ارسم ح غ حتى يوازي ا ب

فلكون ح ك و غ ي عمودين على ا ب وهما في سطح واحد فهما متوازيان. ولان
ح غ ح د يوازيان ي ب و ي ف فالسطح غ ح د يوازي السطح ب ي ف (ق ١٢ ك
٢ مضافات) فالخط غ ي العمودي على ب ي ف هو عمود على السطح غ ح د
ايضاً (فرع ق ١٢ ك ٢ مضافات) وح ك يوازي غ ي فهو عمود على السطح غ ح د
(ق ٧ ك ٢ مضافات) فهو عمود على ح د الواقع في ذلك السطح (حد ١ ك ٢ مضافات)
وقد رُسم ح ك عموداً على ا ب فهو عمود على الخطين المفروضين

القضية العشرون. ن

اذا احاطت ثلاث زوايا بسيطة بزاوية مجسمة فكل اثنتين منها معاً
أكبر من الثالثة

لتنع الزاوية المجسمة ا بين الزوايا الثلاث البسيطة ب ا س ب ا د س ا د



فكل اثنتين منها معاً أكبر من الثالثة

فان كانت هذه الزوايا الثلاث متساوية فالامر واضح ان اثنتين منها معاً أكبر من الثالثة. وان لم تكن متساوية فلتكن ب ا س الزاوية التي ليست اصغر من احدى الاخرين والتي هي أكبر من احدهما اي

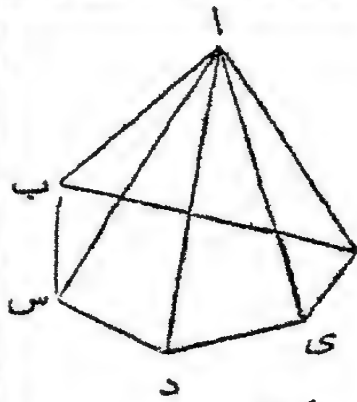
من د ا ب. وعند النقطة ا في الخط المستقيم ا ب وفي السطح المار بالخطين ب ا س اجعل الزاوية ب ا ي تعدل الزاوية د ا ب (ق ٢٢ ك ١) واجعل ا ي = ا د وفي النقطة ي ارسم الخط ب ي س حتى يقطع ا ب و ا س في ب و س وارسم ب د و د س

فلكون د ا = ا ي و ا ب مشتركاً بين المثلثين ب ا د ب ا ي والزاوية ب ا د = ب ا ي فالقاعدة ب د تعدل القاعدة ب ي (ق ٤ ك ١) ولان ب د و د س معاً اطول من ب س (ق ٢٠ ك ١) وقد تبرهن ان احدهما ب د = ب ي الذي هو جزء من ب س فالآخر د س هو اطول من الباقي ي س. ولان د ا = ا ي و ا س مشترك بين المثلثين والقاعدة د س اطول من القاعدة ي س فالزاوية د ا س هي أكبر من الزاوية ي ا س (ق ٢٥ ك ١) وقد جعلت الزاوية د ا ب = ب ا ي فالزاويتان د ا ب د ا س معاً أكبر من ب ا ي ا س او من ب ا س. وقد فرض ان ب ا س ليست اصغر من احدى الزاويتين ب ا د د ا س فتكون ب ا س مع احدى الاخرين أكبر من الثالثة

القضية الحادية والعشرون . ن

الزوايا البسيطة المحيطة بزاوية مجسمة هي معاً اصغر من اربع زوايا قائمة.

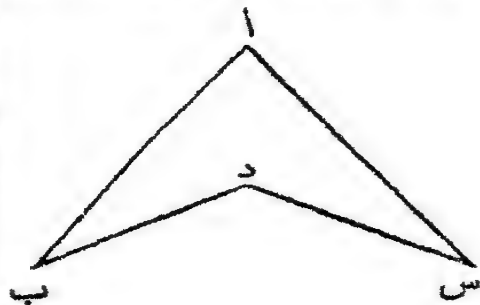
لنكن ا زاوية مجسمة ولنخط بها زوايا بسيطة ب ا س ا د ا ي ا ف



ف ا ب فهي معاً اصغر من اربع زوايا قائمة
لنقطع السطوح المحيطة بالزاوية المجسمة ا
بسطح آخر وليكن محل التقاطع الشكل ذا الاضلاع
المستقيمة ب س د ي ف. فالزاوية المجسمة عند ب
تحيط بها ثلاث زوايا بسيطة س ب ا ا ب ف
ف ب س وكل اثنتين منها اكبر من الثالثة

(ق ٢٠ ك ٢ مضافات) فالزاويتان س ب ا ا ب ف معاً اكبر من ف ب س.
ولهذا السبب ايضاً الزاويتان البسيطتان عند كل واحدة من النقط س د ي ف
وهي التي عند قواعد المثلثات المتلاقية في اها اكبر من الثالثة عند تلك النقط.
فجميع الزوايا عند قواعد المثلثات هي معاً اكبر من جميع زوايا الشكل. وجميع زوايا
المثلثات معاً تعدل من الزوايا القائمة مضاعف عدة المثلثات (ق ٢٢ ك ١) او مضاعف
اضلاع الشكل ب س د ي ف وجميع زوايا الشكل مع اربع زوايا قائمة تعدل من
الزوايا القائمة مضاعف عدة اضلاع الشكل (فرع اول ق ٢٢ ك ١) فجميع زوايا
المثلثات تعدل جميع زوايا الشكل مع اربع زوايا قائمة. ولكن جميع الزوايا عند
قواعد المثلثات اكبر من جميع زوايا الشكل كما قد تبرهن فالزوايا الباقية من المثلثات
اي التي عند مجتمع المثلثات المحيطة بالزاوية المجسمة ا هي اصغر من اربع زوايا قائمة

تعليقة. اذا كانت احدى زوايا الشكل ب س د ي ف خارجة كالزاوية عند د
لا تصح هذه القضية لان الزوايا المجسمات عند القاعدة غير محاطة كلها بالزوايا البسيطة



التي اثنتان منها في السطوح المثلثة المجتمعة
عند ا والثالثة زاوية داخلية من الشكل
المذكور. فلا يقال ان مجتمع الزوايا عند
قواعد المثلثات هو ضرورة اكبر من مجتمع
زوايا الشكل ب س د ي ف

اصول الهندسة مضافات

الكتاب الثالث في مقايسة الاجسام

حدود

- ١ الجسم هو ما كان له طول وعرض وعمق
- ٢ والاجسام المتشابهة هي التي تحيط بها عدة واحدة من سطوح متشابهة شكلاً ووضعاً لها ميل واحد بعضها على بعض
- ٣ الهرم جسم يحيط به سطوح متلاقية في نقطة واحدة وتلك السطوح هي بين هذه النقطة وسطح اخر
- ٤ المشور ويقال له المشور جسم يحيط به سطوح منها سطحان متقابلان متساويان متشابهان ومتوازيان والبقية ذات اضلاع متوازية
- ٥ المتوازي السطوح هو جسم يحيط به ستة سطوح كل واحد منها ذو اربعة اضلاع وكل اثنين منها متقابلان
- ٦ المكعب جسم يحيط به ست مربعات متساوية
- ٧ الكرة جسم يرسم بدوران نصف دائرة على قطر ثابت
- ٨ محور الكرة ويقال له الجزء او الجزع هو الخط الثابت الذي دار عليه نصف الدائرة
- ٩ مركز الكرة هو مركز نصف الدائرة الذي رسمت الكرة بدورانه
- ١٠ قطر الكرة هو خط مستقيم يمر بمركزها وينتهي طرفاه في سطحها

١١ المخروط هو جسم بُرِّسَ بدوران مثلث ذي قامة على أحد ضلعيه المحيطين بالقامة

١٢ محور المخروط أو جزعته هو الضلع الثابت من المثلث الذي رُسم المخروط بدورانه

١٣ قاعدة المخروط هي الدائرة المرسومة بالضلع الدائر الذي يلي القامة من المثلث الذي بدورانه رُسم المخروط

١٤ الاسطوانة جسم مرسوم (بدوران) شكل ذي اضلاع متوازية وزوايا قامة على أحد اضلاعه

١٥ سهم الاسطوانة أو محورها هو الضلع الثابت من الشكل الذي رُسمت الاسطوانة بدورانه

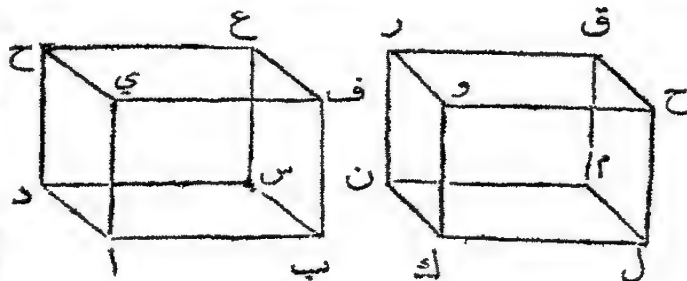
١٦ قاعدتا الاسطوانة هما الدائرتان المحادثتان من دوران الضلعين المتقابلين من الشكل الذي بدورانه رُسمت الاسطوانة

١٧ المخاريط المتشابهة والاساطين المتشابهة هي التي تكون سهامها واقطار قواعدها متناسبة

القضية الاولى . ن

إذا أُحيط جسمان بعدة متماثلة من السطوح المتساوية المتشابهة شكلاً ووضعاً وكان ميل السطحين المتواليين في الجسم الواحد مثل ميل نظيرهما في الآخر فالجسمان متساويان ومتشابهان

ليكن ا غ وك ق جسمين محاطين بعدة متماثلة من السطوح المتساوية المتشابهة



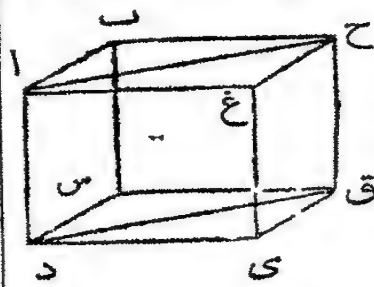
شكلاً ووضعاً أي السطح اس يشبه السطح ك م ويعدله و اف يشبه ك ج ويعدله وهكذا في البقية وليكن ميل ا ف على اس مثل ميل ك ج على ك م

وهكذا في البقية فالجسم ك ق يعدل الجسم ا غ ويشبهه
ليوضع الجسم ك ق حتى تطبق قاعدته ك م على ا س قاعدة الجسم ا غ اي حتى
تقع ن على د وك على ا وم على س ول على ب اذ القاعدتان متساويتان ومتشابهتان
(اولية تامة ك ا) . فلكون السطح ك م يطابق السطح ا س وبالمفروض ميل ك ر على
ك م مثل ميل ا ح على ا س فالسطح ك ر يطابق السطح ا ح لانهما متساويان ومتشابهان
(اولية تامة ك ا) وضلعاهما المتساويان ك ن و ا د متطابقان . وهكذا يبرهن في بقية
سطوح الجسمين ان كل واحد يطابق نظيره فالجسمان متطابقان كلياً فهما متساويان
ومتشابهان

القضية الثانية . ن

اذا أحيط جسمٌ بستةً سطوح كل اثنين منها متوازيان فالسطوح
المتقابلة هي اشكال متوازية الاضلاع متشابهة ومتساوية

ليكن س د ع ح جسمًا احاط به السطوح المتوازية ا س غ ق و ب غ س ي
وق ب ي ا فالسطوح المتقابلة هي متواربة الاضلاع
متشابهة ومتساوية



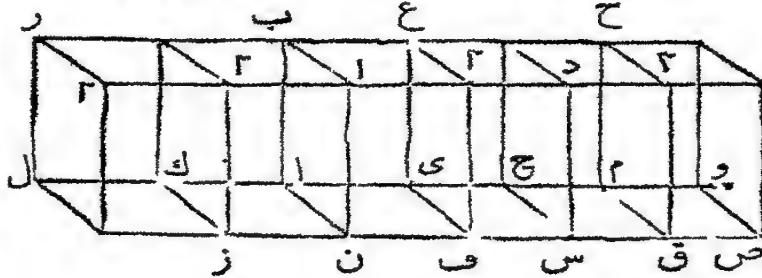
لأن السطح ا س يتقطع السطحين المتوازيين ب ع
وس ي فخطاً التقاطع ا ب ود س متوازيان (ق ٤ ا
ك ٢ مضافات) ولأن السطح ا س يقطع السطحين

المتوازيين ب ق و ا ي فخطاً التقاطع ب س و ا د متوازيان و ا ب يوازي س د كما
نقدم فالشكل ا ب س د متوازي الاضلاع وهكذا يبرهن في بقية السطوح انها
متواربة الاضلاع . ارسم ا ح ود ق . فلكون ا ب يوازي د س و ب ح يوازي س ق
فالخطان المتلاقيان ا ب ب ح يوازيان المتلاقيين د س س ق . فالزاوية ا ب ح =
د س ق (ق ٩ ك ٢ مضافات) ولكون ا ب ب ح يعدلان د س س ق والزاوية
ا ب ح = د س ق فالقاعدة ا ح = د ق (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب ح = المثلث د س ق .
ولهذا الساس ا ب ح = د س ق . ما يتكامل ب ع = س ي وهكذا يبرهن ان ا س =

القضية الثالثة. ن

جسم متوازي السطوح اذا قُطِعَ بسطح يوازيه سطحين متوازيين من سطوحه ينقسم الى جسمين نسبة بعضهما الى بعض كسبة قاعدتيهما بعضها الى بعض

ليكن ا ب س د جسمًا متوازي السطوح وليقطع السطح ف ع الموازي السطحين



المتقابلين ن ب ح د

فينقسم الجسم الى

جسمين ن ب ف ع

وغ ف ح د حتى

تكون نسبة ن ب ف غ

الى غ ف ح د كسبة القاعدة اى ف ن الى القاعدة اى ح س ف

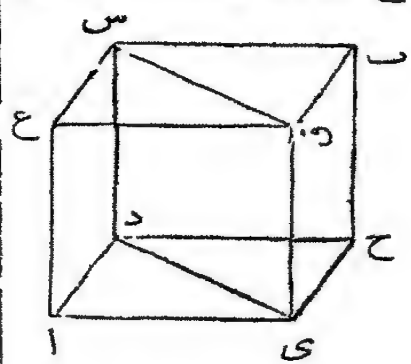
اخرج اح الى الجهتين وخذ ح م وم وحتى بعدلاى ح وخذاك كل حتى بعدلاى ونم الاشكال المتوالية الاضلاع ل ز كن ح ق م ص والاجسام ل ٢ ك ا ح ٢ م ت. المخطوط ل ك ا اى متساوية والمخطوط ل ز ان اى ف متساوية وهي تحدث زوايا متساوية مع ل ك ا و اى فالاشكال المتوازية الاضلاع ل ز كن ا ف متساوية ومتشابهة (ق ٢٦ ك ا و حد ا ك ٦) وهكذا الاشكال ل ك ب ا غ وايضا الاشكال ل ٢ ك ا ١ ٢ (ق ٢ ك ٢ مضافات) لانها سطوح متقابلة. وهكذا يبرهن ان الاشكال اى س ح ق م ص متساوية (ق ٢٦ ك ا حد ا ك ٦) وايضا الاشكال ح غ ح ج ج و وايضا ح د م ٢ ت و (ق ٢ ك ٢ مضافات) فثلاثة سطوح من الجسم ل ٢ تعدل وتساه ثلثة سطوح من الجسم ك ا وثلاثة سطوح من الجسم ا ٢ والثلاثة التي تقابلها في الاجسام الثلاثة هي متساوية ومتشابهة (ق ٢ ك ٢ مضافات) فالاجسام ل ٢ ك ا ١ ٢ تحيط بها سطوح متساوية ومتشابهة. ولكون السطوح ل ٢ ك ا ١ ٢ متوازية ويقطعها السطح ر ٢ يكون ميل ل ٢ على ر ٢ مثل ميل ك ٢ على ٢ ب او ميل ا ١ على ب ٢ (ق ١٥ ك ٢ مضافات) وهكذا يقال في بقية السطوح المتوالية. فالاجسام

ل ٢ ك ١ ا في متساوية (ق ١ ك ٢ مضافات). وهكذا يبرهن ان الاجسام
 ي د ح ٢ م متساوية فكما نتكررا ف في ل ف هكذا يتكرر الجسم ا ٢ في الجسم
 ل ٢ وكذلك كما نتكرر ف ح في ف وهكذا يتكرر الجسم ي د في الجسم ي ت وإذا
 كانت القاعدة ل ف تعدل القاعدة ف ف والجسم ل ٢ يعدل الجسم ي ق (ق ١
 ك ٢ مضافات) وان كانت اكبر فاكبر وان كانت اصغر فاصغر فالقاعدة ا ف :
 القاعدة ف ح :: الجسم ا ٢ : الجسم ي د (حد ٥ ك ٥)
 فرع. لان الشكل المتوازي الاضلاع ا ف : ف ح :: ن ف : ف س (ق ١ ك ٦)
 فالجسم ا ٢ : الجسم ي د :: ن ف : ف س

القضية الرابعة ن

جسم متوازي السطوح اذا قطعه سطح مار بقطري السطحين
 المتقابلين ينقسم الى موشورين متساويين

ليكن ا ب جسما متوازي السطوح وليقطع بالسطح س ق ي د المار بقطري
 السطحين المتقابلين غ ب واح فانه ينقسم الى
 موشورين متساويين. لان س د يوازي غ ا وق ي
 يوازي ع ا وهوليس في سطحه فالحيطان س د ق ي
 متوازيان (ق ١ ك ٢ مضافات) فالقطران س ق
 د ي هما في سطح س د وق ي فهما متوازيان (ق ١ ك ٤
 ك ٢ مضافات) والثلث س ب ق = س غ ق



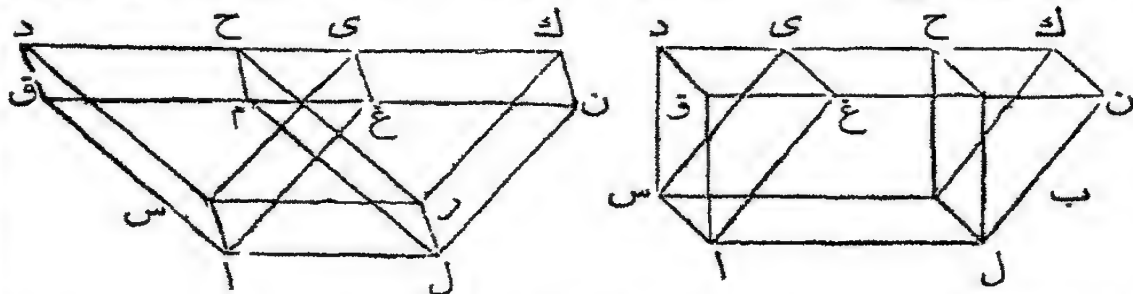
(ق ٢٤ ك ١) ود ح ي = د ا ي والشكل س ا يعدل الشكل المقابل له ب ي
 (ق ٢ ك ٢ مضافات) وغ ي = س ح فالسطوح المحيطة بالموشورين س ا ي
 س ب ي متساوية ومتشابهة كل واحد بنظيره وهي على ميل واحد بعضها على
 بعض لان السطح ا س يوازي السطح ي ب و ا ق يوازي س ح ونقطتها السطح س ي
 (ق ١٥ ك ٢ مضافات) فالوشور س ا ي = س ب ي (ق ١ ك ٢ مضافات)

تدبر. في القضايا الآتية يراد بالمحيط الرافعة اضلاع الاشكال الواقعة بين
 قاعدة الجسم والسطح الذي يقابلها

القضية الخامسة. ن

الجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد هي متساوية
إذا انتهت خطوطها الواقفة الى خط مستقيم واحد في السطح الذي
يقابل القاعدة

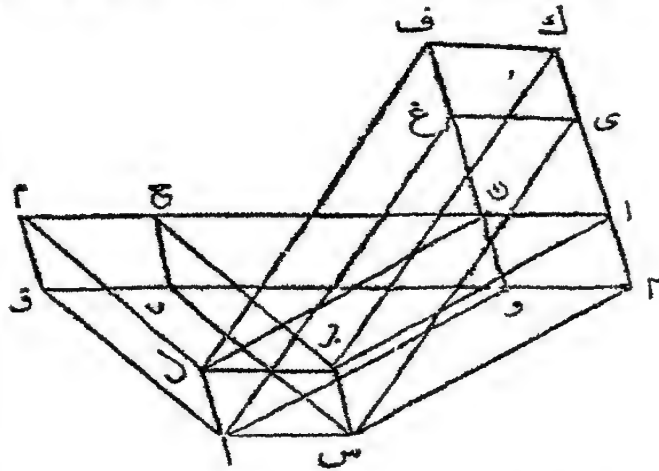
ليكن اح اك جسمين على قاعدة واحدة اب وعلى علو واحد وخطوطهما



الواقفة اق اغ ل م ل ن منتهية الى خط واحد ق ن والخطوط س د س ي
ب ح ب ك منتهية الى خط واحد د ك فالجسمان متساويان
لان س ح س ك متوازي الاضلاع فالضلع س ب يعدل كل واحد من
الضلعين المتقابلين د ح وى ك (ق ٢٤ ك ١) د ح = ي ك فان اضيف اليهما الجزء
المشترك ح ي او طرح منهما فالجمع او الباقي دى = المجتمع او الباقي ك ح والمثلث
س دى = ب ح ك (ق ٢٨ ك ١) والشكل د غ = الشكل ح ن (ق ٢٦ ك ١) ولهذا
السبب اق غ = ل م ن وس ق = ب م (ق ٢ ك ٢ م) وس غ = ب ن لانها سطوح
متقابلة فالسطوح المحيطة بالموشور دا غ اما تعدل وتشبه السطوح المحيطة بالموشور
ح ل ن كل واحد يعدل ويشبه نظيرة والسطوح المتوالية هي على ميل واحد بعضها
على بعض (ق ١٥ ك ٢ م) فالموشوران دا غ ح ل ن متساويان (ق ١ ك ٢ م)
فان طرح الموشور ل ن ح من الجسم الذي قاعدته التكل اب وق د ك ن السطح
المقابل لها وطرح منه ايضا الموشور دا غ د فالجسم الباقي اي المتواري السطوح اح
يعدل الباقي اك

القضية السادسة. ن

اجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد هي متساوية وان لم تنته خطوطها الواقفة في خط واحد في السطح المقابل القاعدة ليكن الجسمان المتوازي السطوح س م وس ف على قاعدة واحدة ا ب وعلى علو واحد



واحد وخطوطها الواقفة اق اغ ل م ل ف س د س ي ب ح ب ك غير منتهية الى خط واحد كما في القضية السابقة فالجسمان س م س ف متساويان

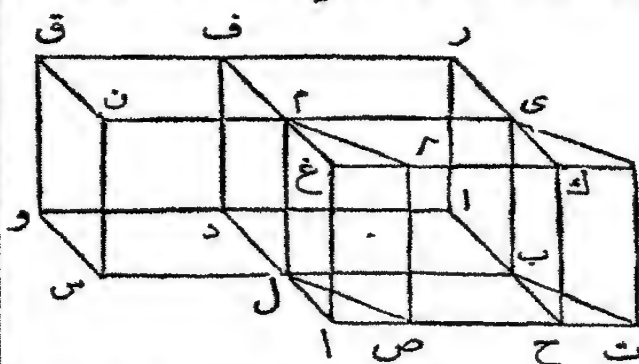
لانها على علو واحد فالسطح ح ق والسطح ك غ في

سطح واحد واذا اخرج السطح ح ق والسطح ك غ تقاطع اضلاعها. فليخرجوا ولينقاطعا في ا ن ٢ و. فالجسم س ف = س ن (ق ه ك ٢ مضافات) والجسم س ق = س ن (ق ه ك ٢ مضافات) فالجسم س ف = س م (اولية ا ك ا)

القضية السابعة. ن

اجسام متوازية السطوح على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي متساوية

ليكن الجسمان المتوازي السطوح س ف و ا ي على علو واحد وعلى قاعدتين



متساويتين ح ل وس د فهما متساويان

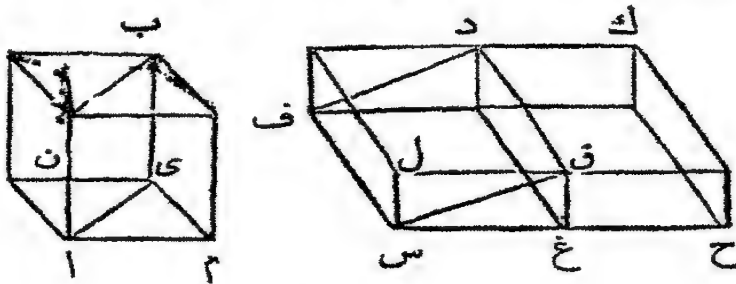
ليوضع الجسمان حتى تكون القاعدتان في سطح واحد. فلكونهما على علو واحد يكون السطحان المقابلان القاعدتين

ن ف غ ي ايضا في سطح واحد وتخرج السطوح حتى يصطنع السطحان م ر وب د
وتم الجسم ل ر فهو يعدل الجسم س ف (ق ١ ك ٢ م) وهو ايضا يعدل اى فالجسم
اى يعدل الجسم س ف (اولية ا ك ١)

القضية الثامنة. ن

اجسام متوازية السطوح اذا كانت على علو واحد تكون نسبة بعضها
الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن اب وس د جسمين متوازيي السطوح وعلى علو واحد فنسبة اب :



س د :: القاعدة اى :

القاعدة س ق

ارسم الشكل

المتوازي الاضلاع ق ح

على الخط المستقيم

ق غ حتى يعدل القاعدة اى (فرع ق ٤٥ ك ١) والزاوية ق غ ح فلتعدل ل س غ
وتم الجسم المتوازي السطوح غ ك على القاعدة ق ح فيكون ق د واحدا من خطوطه
الواقفة فيكون الجسمان س د و غ ك على علو واحد والجسم اب يعدل الجسم غ ك
(ق ٧ ك ٢ م) ونسبة ح ق : ق س :: الجسم ح د : الجسم د س (ق ٢ ك ٢ م) والقاعدة

ح ق = اى والجسم غ ك = اب فنسبة اب : س د :: اى : س ق

فرع اول. يتضح من هذه القضية ان المواشير على قواعد مثلثة الاضلاع وعلى

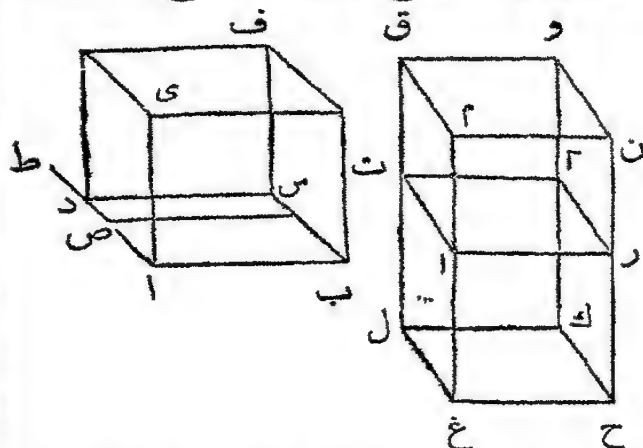
علو واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

فرع ثان. اذا كان جسم متوازي السطوح وموشر على علو واحد فنسبة احدها

الى الاخر كنسبة قاعدة الواحد الى قاعدة الاخر

القضية التاسعة . ن

اجسام متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة سطح
علو الواحد في مساحة قاعدته الى سطح علو الاخر في مساحة قاعدته
ليكن اف و غ و جسمين متوازي السطوح . فنسبة اف : غ و :: اس : س



س ف : غ ك × ك و
من غ م احد الخطوط
الواقفه للجسم غ و اقطع غ ا
حتى يعدل س ف او اى
من الجسم اف وليمر بالنقطة
ا سطح يوازي غ ك مثل
السطح ا ت ا ر ف الجسم غ ٢

متوازي السطوح (حد ه ك ٢ م) وعلوه هو علو اف . ونسبة الجسم اف : الجسم غ و
هي مركبة من نسبة اف : غ ٢ ونسبة غ ٢ : غ و (حد ا ك ه) ونسبة اف : غ ٢
هي كنسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك (ق ا ك ٢ م) لانها على علو واحد ونسبة الجسم
غ ٢ : الجسم غ وهي كنسبة غ ا : غ م (ق ا ك ٢) فالنسبة المركبة من نسبة اف :
غ ٢ ومن نسبة غ ٢ : غ و هي مثل المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك
والعلو اى : العلو غ م (ق و ك ه) ولكن نسبة اف : غ وهي المركبة من اف : غ ٢
وغ ٢ : غ و فنسبة اف : غ وهي المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك والعلو
اى : العلو غ م فنسبة اف : غ و :: اس : س ف : غ ك × ك و

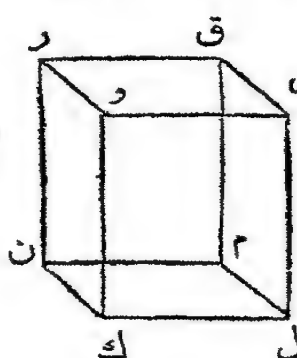
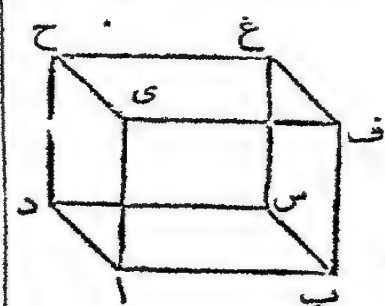
فرع اول . يمكن استعمال خطين مستقيمين نسبة احدهما الى الاخر كنسبة الجسم
اف الى الجسم غ و . ليوضع الشكل المتوازي الاضلاع ب ص على ا ب وليفرض
ا ب ب ص = غ ك وزاوية من زواياة تعدل ب ا د (ق ا ك ٢) و ا ص : ا ط ::
اى : غ م (ق ا ك ٢) فتكون نسبة ا د : ا ط :: الجسم اف : غ و . لان نسبة ا د :
ا ط مركبة (حد ا ك ه) من نسبة ا د : ا ص ونسبة ا ص : ا ط ولكن نسبة ا د :
ا ص هي مثل نسبة الشكل اس : الشكل ب ص او غ ك (ق ا ك ٢) ونسبة
ا ص : ا ط هي مثل نسبة اى : غ م فنسبة ا د : ا ط مركبة من نسبة اس : غ ك

ونسبة اى : غ م (ق ه ك ه) ونسبة الجسم ا ف الى الجسم غ و هي مركبة من ذات
 هذه النسب فنسبة ا ف : غ و :: ا د : ا ط
 فرع ثانى . نسبة المواشير بعضها الى بعض كالنسب المركبة من قواعدها في
 علوها (فرع ٢ ق ٨ ك ٢ م)

القضية العاشرة . ن

اجسام متوازية السطوح هي متساوية اذا كانت قواعدها وعلوها
 متناسبة بالتكافؤ . والاجسام المتوازية السطوح المتساوية تكون
 قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ

لتكن نسبة ا س : ك م :: ك و : اى ف الجسم ا غ = الجسم ك ق لانه يحوّل هذه



النسبة لنا ا س × اى = ك م
 × ك و و ا س × اى = ا غ
 (ق ٩ ك ٢ م) و ك م × ك و
 = ك ق

ثم اذا قُرِضَ ا ن ا س
 × اى = ك م × ك و لنا
 ا س : ك م :: ك و : اى

فرع . في المواشير المتساوية تكون قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ وبالعقاب
 اذا كانت العلو والقواعد متناسبة بالتكافؤ تكون المواشير متساوية

القضية الحادية عشرة . ن

اجسام متشابهة متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة
 كهوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض

ليكن $ا غ و ك$ ق جسمين متوازيي السطوح $ا ب$ و $ك ل$ الضلعين المتشابهين
 فنسبة $ا غ : ك ق :: ا ب : ك ل$
 لكون الجسمين متشابهين يكون
 اح $و ك$ ر سطحين متشابهين $ا ف$
 و $ك ط$ كذلك (حد ٢ ك ٢ م)
 ونسبة $ا ب : ك ل$ و $ا ي : ك و$

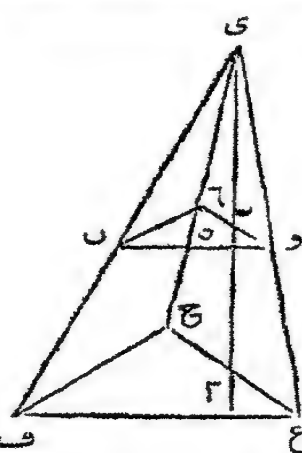
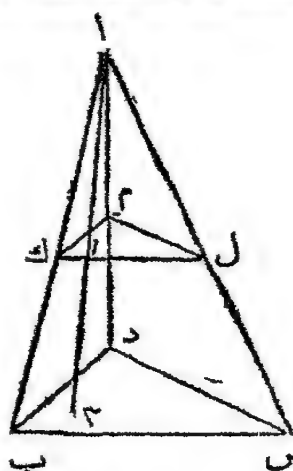
و $ا د : ك ن$ متساوية (حد ١ ك ٦) ونسبة $ا غ : ك ق$ هي مركبة من نسبة $ا س : ك م$
 و $ا ي : ك و$ ونسبة $ا س : ك م$ هي مركبة من $ا ب : ك ل$ و $ا د : ك ن$ فنسبة $ا غ :$
 $ك ق$ مركبة من النسب الثلاث اي نسبة $ا ب : ك ل$ و $ا د : ك ن$ و $ا ي : ك و$ وقد
 تبهرن ان هذه النسب الثلاث متساوية اذا $ا ب : ك ل :: ا غ : ك ق$ (حد ١٢ ك ٥)

فرع اول . اذا فرض $ا ب : ك ل :: ك ل : م$ و $ك ل : م : ن$ فتكون نسبة
 $ا ب : ن :: ا غ : ك ق$. لان $ا ب : ن = ا ب : ك ل :: ا ب : ك ل$ (حد ١٢ ك ٥) اي $ا غ : ك ق$
 فرع ثان . لكون الاجسام المكعبة متشابهة يكون المكعب على $ا ب : المكعب$
 على $ك ل :: ا غ : ا ق$ فنسبة اجسام متوازية السطوح بعضها الى بعض كنسبة
 كعوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض
 فرع ثالث . وهكذا يبرهن ايضا ان الموشورات المتشابهة هي ككعوب اضلاعها
 المتشابهة

القضية الثانية عشرة . ن

هرمان مثلثا الاضلاع على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد اذا
 قُطِع كل واحد منهما بـ سطحٍ يوازي قاعدته وعلى بعد واحد من
 القاعدتين يكون موضعا التقاطع متساويتين

ليكن $ا ب س د$ $ي ف غ ح$ هرمين متلي الاضلاع على قاعدتين متساويتين
 $د ب س$ $ح ف غ$ وعلى علو واحد اي العمود $٢ ا$ والعمود $٢ م$ من $ا و ي$ على
 القاعدتين و $ا ب$ $ا ح$ $ا د$ $ا هـ$ بالسطح $ا ل م$ والآخر بالسطح $ا ن و$ على $ا د$ واحد من



القاعدتين اي طول العمودين
٢١ و ٢٥ فموضعا النقط
اي المثلثات ك ل م ن و
متساويان

السطحان ب د س
ك م ل متوازيان ويلاقيهما
السطح ا ب د فالخطان
ب د ك م متوازيان (ق ١٤)

ك ٢ م) وهكذا يبرهن ان د س وم ل متوازيان وب د د س يوازيان ك م م ل
وليست في سطح واحد فالزاوية ب د س تعدل الزاوية ك م ل (ق ٩ ك ٢ م) وعلى
هذا الاسلوب يبرهن ان بقية زوايا المثلثين متساوية كل واحدة لمظيرها فالمثلثان
متشابهان وهكذا ايضا في المثلثين ف ع ح ن و ٦ فهما متشابهان لان الخطين
المستقيمين ٢ ١ ١ ك ب يلاقيان السطحين المتوازيين ك م ل ب د س فيقطعهما على
نسبة واحدة (ق ١٦ ك ٢ م) ونسبة ١ ٢ : ١ ١ : ب ك : ك ١ و ١ ١ : ١ ١ : ا ب : ا ك
(ق ١٨ ك ٥) وهكذا ايضا ي ٢ : ٥ ي ف : ٥ ي ن فتكون نسبة ا ب : ا ك ::
ي ف : ي ن لان ٢ ١ = ي ٢ و ١ ١ = ي ٥ ولان المثلثين ا ب س ا ك ل
متشابهان ا ب : ا ك :: ب س : ك ل وايضا
ي ف : ي ن :: ف غ : ن و فلما
ب س : ك ل :: ف غ : ن و

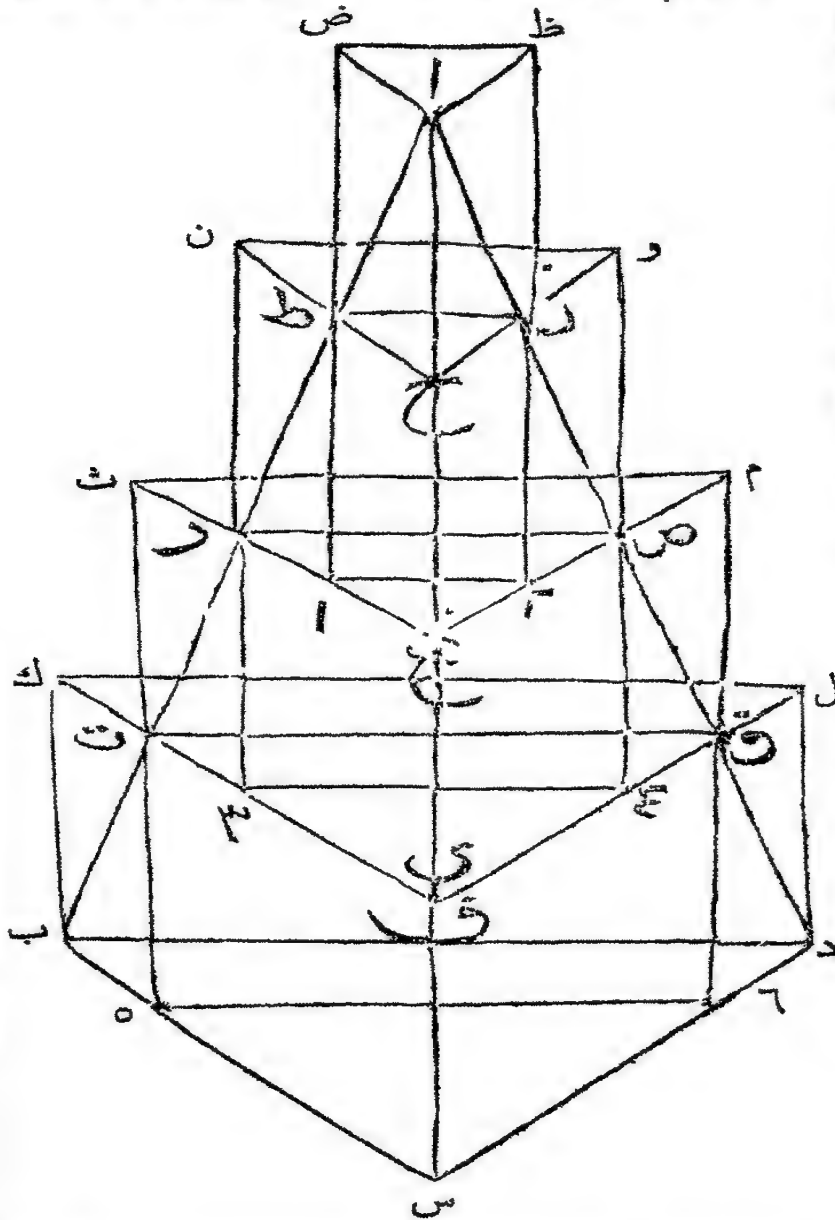
واذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة تكون الاشكال المرسومة عليها متناسبة
ايضا (ق ٢٢ ك ٦) فالمثلث ب س د : المثلث ك ل م :: المثلث ف غ ح : المثلث
ن و ٦ ولكن قد فرض ان ب س د ف ع ح متساويان فاذا ك ل م ن و ٦
متساويان ايضا (ق ١ ك ٥)

فرع اول . كل موضع يُقَطَّع فيه هرمٌ مثلث الاضلاع على موازاة قاعدته هو
مثلث يشبه قاعدة الهرم وهكذا يبرهن ان الشكل الحادث من قطع كل هرم على
موازاة قاعدته هو شكل شبيه بقاعدة الهرم
فرع ثانٍ . اهرام كثيرة الاضلاع وهي على علو واحد وعلى قواعد متساوية تكون

الاشكال السداسية من قطعها على بعدي واحد من القواعد متساوية

القضية الثالثة عشرة . ن

يمكن ان ترسم عدة مواشير على علو واحد محيطه بهرم حتى يكون مجتمع المواشير اعظم من الهرم بمقدار جسم اصغر من جسم مفروض
ليكن ا ب س د هرمًا وز الجسم المفروض فقد يمكن ان يرسم عدة مواشير محيطه



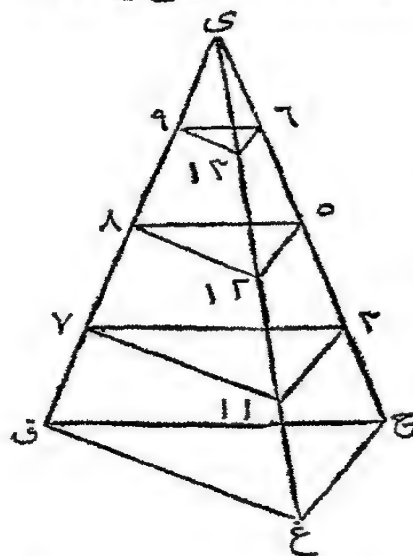
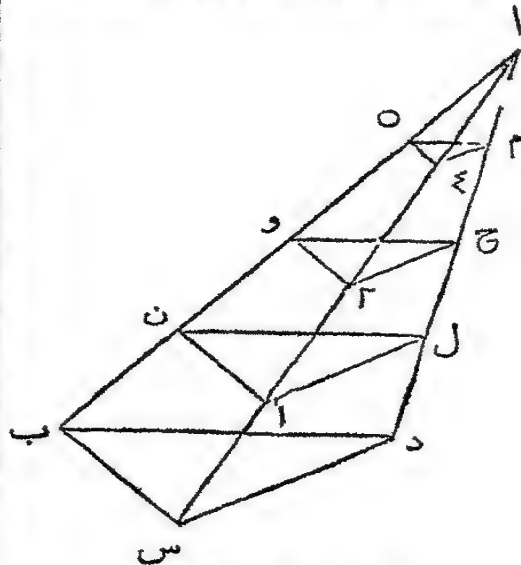
بالهرم ا ب س د مجتمعها
اعظم من ا ب س د
بمقدار جسم اصغر من ز
لفرض ان ز يعدل
موشورًا على قاعدة الهرم
ب س د وعلوه ي س
العمود على القاعدة
ب س د . فان ضرب
س ي في م مثلاً يكون
الحاصل اكبر من ا س .
اقسم س ا الى اقسام
متساوية عددها يماثل
الاحاد في م ولتكن
تلك الاقسام س ف
ف غ ح و ا فيكون
كل واحد منها اقل
من س ي . ثم ليمر في
النقط ف و غ و ح سطوح
توازي القاعدة وتصنع مع
اضلاع الهرم السطوح

فت ق وغ ر ص وح ط ذ فهي متشابهة بعضها لبعض والقاعدة ب س د (ق ١٢ ك ٣ فرع ١ م) ثم ارسم من ب الخط ب ك حتى يوازي س ف ويلاقي ف ت بعد اخراجه في ك وهكذا دل حتى يلاقي ف ق في ل وارسم ك ل فيكون ك ب س د ل ف موشورًا (حد ٤ ك ٢ م) وعلى هذا القياس اصنع الموشير ت م ورو و ط ظ ثم اخرج ث ت الى ٥ وم ق الى ٦ وارسم الخط ٦ ٥ فيكون ٥ س ٦ ق ف ت موشورًا يعدل الموشور ت م (ق ٨ ك ٣ فرع ١ م) وعلى هذا القياس اصنع الموشير ٢ ص = رو و ا ذ = ط ظ فجميع الموشير الداخلية ٥ ق و ٢ ص و ا ذ = مجتمع ت م ورو و ط ظ اي مجتمع الخارجية الأ ب ل فيكون ب ل فضلة الموشير الداخلية والخارجية وب ل انما هو اصغر من الموشور على القاعدة ب س د وعلى علوس ي الذي يعدل الجسم المفروض ز. فضلة الموشير الخارجية والداخلية هي اصغر من الجسم المفروض ز وهذه الفضلة انما هي اعظم من فضلة الموشير الخارجية والهرم ا ب س د لان الهرم اعظم من مجتمع الموشير الداخلية فبالاخرى تكون فضلة الموشير الخارجية والهرم اصغر من الجسم المفروض ز

القضية الرابعة عشرة ن

اهرام على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي متساوية

ليكن ا ب س د ي ق غ ح هرمين على قاعدتين متساويتين ب س د



ق غ ح وعلى
علو واحد اي
العمود من
الراسين ا و ي
على القاعدتين
فالهرمان
متساويان
والا

فليكن ي ق غ ح اعظم من ا ب س د بمقدار جسم ز. فيمكن ان ترسم عدة موشير على

علو واحد محيطه بالهرم ا ب س د حتى يكون مجتمعها اعظم من الهرم بمقدار جسم
 اصغر من ز (ق ١٢ ك ٢ م) ولتكن قواعد هذه المواشير المثلثات ب س د ا ن ل
 ٢ و ج ٥ ٤ م. اقسام ي ح الى اقسام متساوية تماثل اقسام ا د و هي ي ٦ ٦ ٥
 ٢ ٢ ح ولتم بهذه النقاط سطوح توازي القاعدة ق غ خ وهي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢
 ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠ ١٠١ ١٠٢ ١٠٣ ١٠٤ ١٠٥ ١٠٦ ١٠٧ ١٠٨ ١٠٩ ١١٠ ١١١ ١١٢ ١١٣ ١١٤ ١١٥ ١١٦ ١١٧ ١١٨ ١١٩ ١٢٠ ١٢١ ١٢٢ ١٢٣ ١٢٤ ١٢٥ ١٢٦ ١٢٧ ١٢٨ ١٢٩ ١٣٠ ١٣١ ١٣٢ ١٣٣ ١٣٤ ١٣٥ ١٣٦ ١٣٧ ١٣٨ ١٣٩ ١٤٠ ١٤١ ١٤٢ ١٤٣ ١٤٤ ١٤٥ ١٤٦ ١٤٧ ١٤٨ ١٤٩ ١٥٠ ١٥١ ١٥٢ ١٥٣ ١٥٤ ١٥٥ ١٥٦ ١٥٧ ١٥٨ ١٥٩ ١٦٠ ١٦١ ١٦٢ ١٦٣ ١٦٤ ١٦٥ ١٦٦ ١٦٧ ١٦٨ ١٦٩ ١٧٠ ١٧١ ١٧٢ ١٧٣ ١٧٤ ١٧٥ ١٧٦ ١٧٧ ١٧٨ ١٧٩ ١٨٠ ١٨١ ١٨٢ ١٨٣ ١٨٤ ١٨٥ ١٨٦ ١٨٧ ١٨٨ ١٨٩ ١٩٠ ١٩١ ١٩٢ ١٩٣ ١٩٤ ١٩٥ ١٩٦ ١٩٧ ١٩٨ ١٩٩ ٢٠٠ ٢٠١ ٢٠٢ ٢٠٣ ٢٠٤ ٢٠٥ ٢٠٦ ٢٠٧ ٢٠٨ ٢٠٩ ٢١٠ ٢١١ ٢١٢ ٢١٣ ٢١٤ ٢١٥ ٢١٦ ٢١٧ ٢١٨ ٢١٩ ٢٢٠ ٢٢١ ٢٢٢ ٢٢٣ ٢٢٤ ٢٢٥ ٢٢٦ ٢٢٧ ٢٢٨ ٢٢٩ ٢٣٠ ٢٣١ ٢٣٢ ٢٣٣ ٢٣٤ ٢٣٥ ٢٣٦ ٢٣٧ ٢٣٨ ٢٣٩ ٢٤٠ ٢٤١ ٢٤٢ ٢٤٣ ٢٤٤ ٢٤٥ ٢٤٦ ٢٤٧ ٢٤٨ ٢٤٩ ٢٥٠ ٢٥١ ٢٥٢ ٢٥٣ ٢٥٤ ٢٥٥ ٢٥٦ ٢٥٧ ٢٥٨ ٢٥٩ ٢٦٠ ٢٦١ ٢٦٢ ٢٦٣ ٢٦٤ ٢٦٥ ٢٦٦ ٢٦٧ ٢٦٨ ٢٦٩ ٢٧٠ ٢٧١ ٢٧٢ ٢٧٣ ٢٧٤ ٢٧٥ ٢٧٦ ٢٧٧ ٢٧٨ ٢٧٩ ٢٨٠ ٢٨١ ٢٨٢ ٢٨٣ ٢٨٤ ٢٨٥ ٢٨٦ ٢٨٧ ٢٨٨ ٢٨٩ ٢٩٠ ٢٩١ ٢٩٢ ٢٩٣ ٢٩٤ ٢٩٥ ٢٩٦ ٢٩٧ ٢٩٨ ٢٩٩ ٣٠٠ ٣٠١ ٣٠٢ ٣٠٣ ٣٠٤ ٣٠٥ ٣٠٦ ٣٠٧ ٣٠٨ ٣٠٩ ٣١٠ ٣١١ ٣١٢ ٣١٣ ٣١٤ ٣١٥ ٣١٦ ٣١٧ ٣١٨ ٣١٩ ٣٢٠ ٣٢١ ٣٢٢ ٣٢٣ ٣٢٤ ٣٢٥ ٣٢٦ ٣٢٧ ٣٢٨ ٣٢٩ ٣٣٠ ٣٣١ ٣٣٢ ٣٣٣ ٣٣٤ ٣٣٥ ٣٣٦ ٣٣٧ ٣٣٨ ٣٣٩ ٣٤٠ ٣٤١ ٣٤٢ ٣٤٣ ٣٤٤ ٣٤٥ ٣٤٦ ٣٤٧ ٣٤٨ ٣٤٩ ٣٥٠ ٣٥١ ٣٥٢ ٣٥٣ ٣٥٤ ٣٥٥ ٣٥٦ ٣٥٧ ٣٥٨ ٣٥٩ ٣٦٠ ٣٦١ ٣٦٢ ٣٦٣ ٣٦٤ ٣٦٥ ٣٦٦ ٣٦٧ ٣٦٨ ٣٦٩ ٣٧٠ ٣٧١ ٣٧٢ ٣٧٣ ٣٧٤ ٣٧٥ ٣٧٦ ٣٧٧ ٣٧٨ ٣٧٩ ٣٨٠ ٣٨١ ٣٨٢ ٣٨٣ ٣٨٤ ٣٨٥ ٣٨٦ ٣٨٧ ٣٨٨ ٣٨٩ ٣٩٠ ٣٩١ ٣٩٢ ٣٩٣ ٣٩٤ ٣٩٥ ٣٩٦ ٣٩٧ ٣٩٨ ٣٩٩ ٤٠٠ ٤٠١ ٤٠٢ ٤٠٣ ٤٠٤ ٤٠٥ ٤٠٦ ٤٠٧ ٤٠٨ ٤٠٩ ٤١٠ ٤١١ ٤١٢ ٤١٣ ٤١٤ ٤١٥ ٤١٦ ٤١٧ ٤١٨ ٤١٩ ٤٢٠ ٤٢١ ٤٢٢ ٤٢٣ ٤٢٤ ٤٢٥ ٤٢٦ ٤٢٧ ٤٢٨ ٤٢٩ ٤٣٠ ٤٣١ ٤٣٢ ٤٣٣ ٤٣٤ ٤٣٥ ٤٣٦ ٤٣٧ ٤٣٨ ٤٣٩ ٤٤٠ ٤٤١ ٤٤٢ ٤٤٣ ٤٤٤ ٤٤٥ ٤٤٦ ٤٤٧ ٤٤٨ ٤٤٩ ٤٥٠ ٤٥١ ٤٥٢ ٤٥٣ ٤٥٤ ٤٥٥ ٤٥٦ ٤٥٧ ٤٥٨ ٤٥٩ ٤٦٠ ٤٦١ ٤٦٢ ٤٦٣ ٤٦٤ ٤٦٥ ٤٦٦ ٤٦٧ ٤٦٨ ٤٦٩ ٤٧٠ ٤٧١ ٤٧٢ ٤٧٣ ٤٧٤ ٤٧٥ ٤٧٦ ٤٧٧ ٤٧٨ ٤٧٩ ٤٨٠ ٤٨١ ٤٨٢ ٤٨٣ ٤٨٤ ٤٨٥ ٤٨٦ ٤٨٧ ٤٨٨ ٤٨٩ ٤٩٠ ٤٩١ ٤٩٢ ٤٩٣ ٤٩٤ ٤٩٥ ٤٩٦ ٤٩٧ ٤٩٨ ٤٩٩ ٥٠٠ ٥٠١ ٥٠٢ ٥٠٣ ٥٠٤ ٥٠٥ ٥٠٦ ٥٠٧ ٥٠٨ ٥٠٩ ٥١٠ ٥١١ ٥١٢ ٥١٣ ٥١٤ ٥١٥ ٥١٦ ٥١٧ ٥١٨ ٥١٩ ٥٢٠ ٥٢١ ٥٢٢ ٥٢٣ ٥٢٤ ٥٢٥ ٥٢٦ ٥٢٧ ٥٢٨ ٥٢٩ ٥٣٠ ٥٣١ ٥٣٢ ٥٣٣ ٥٣٤ ٥٣٥ ٥٣٦ ٥٣٧ ٥٣٨ ٥٣٩ ٥٤٠ ٥٤١ ٥٤٢ ٥٤٣ ٥٤٤ ٥٤٥ ٥٤٦ ٥٤٧ ٥٤٨ ٥٤٩ ٥٥٠ ٥٥١ ٥٥٢ ٥٥٣ ٥٥٤ ٥٥٥ ٥٥٦ ٥٥٧ ٥٥٨ ٥٥٩ ٥٦٠ ٥٦١ ٥٦٢ ٥٦٣ ٥٦٤ ٥٦٥ ٥٦٦ ٥٦٧ ٥٦٨ ٥٦٩ ٥٧٠ ٥٧١ ٥٧٢ ٥٧٣ ٥٧٤ ٥٧٥ ٥٧٦ ٥٧٧ ٥٧٨ ٥٧٩ ٥٨٠ ٥٨١ ٥٨٢ ٥٨٣ ٥٨٤ ٥٨٥ ٥٨٦ ٥٨٧ ٥٨٨ ٥٨٩ ٥٩٠ ٥٩١ ٥٩٢ ٥٩٣ ٥٩٤ ٥٩٥ ٥٩٦

القضية الخامسة عشرة.

كل موشور مثلث القاعدة ينقسم الى ثلاثة اهرام متساوية مثلثة القاعدة
لفرض موشوراً قاعدته المثلث ا ب س وليكن دى ف المثلث المقابل القاعدة

فالמושور اب س دی ف قابل الانقسام الى ثلاثة

اهرام متساوية مثلثة القواعد. ارسم ای وس د و س ی

فیکون ابی دمتوازی الاضلاع و قطرہ ای فالثلث

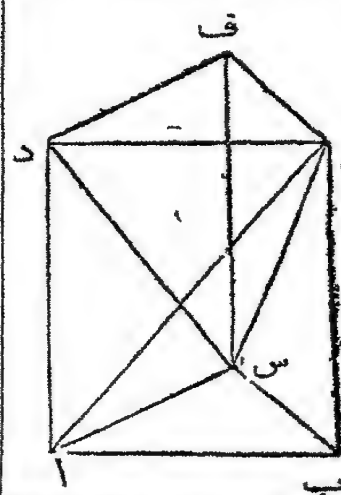
ادی = ابی (ق ۳۴ ک ۱) فالهرم الذی ہے قاعدتہ

ادی بعدل الذی قاعدتہ یب ا وراساها فی س

(ق ۱۴ ك ۳ م) والھم اب سی = دی فس

(ق ٤١ ك ٣ م) فالاهام الثلاثة ادى س ابى س

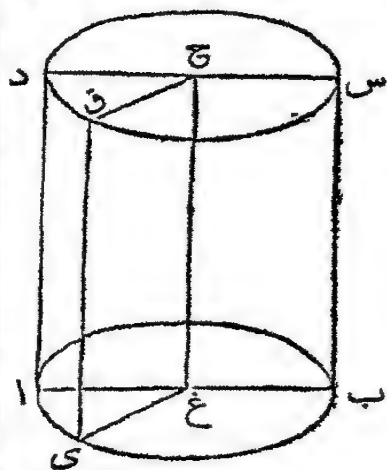
دفعه س. ه. متساوية محتويها هو المشهور الف. و. و.



فرع^١ اول. كل هرم هو ثلث موشور على قاعدة تعدل قاعدته وعلى علوه يعدل علوه لانه ولئن كانت قاعدته غير مثلثة يمكنها ان تقسم الى مواشير لها قواعد مثلثة فرع^٢ ثان. نسبة اهرام على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض (ق ٨ ك ٢ فرع ١ م)

القضية السادسة عشرة من

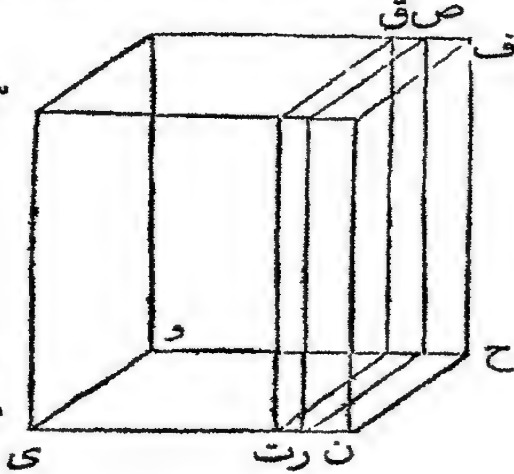
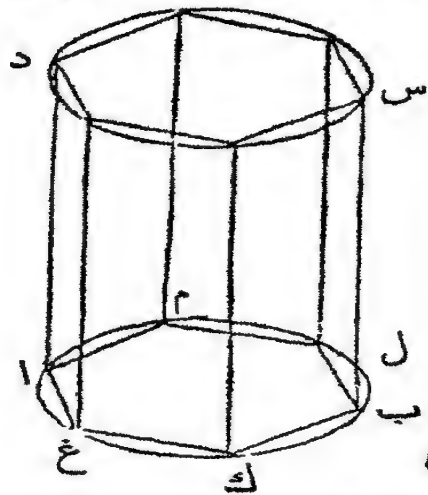
اذا فُرِضَتْ نقطة في محيط قاعدة اسطوانة ورُسِمَ منها خطٌ مستقيم عموداً على سطح القاعدة يكون الخطُّ كله في سطح الاسطوانة لكن ا ب س د اسطوانة محيط قاعدتها ا ب وتكن د ق س الدائرة التي



القضية السابعة عشرة . ن

اسطوانة وجسم متوازي السطوح على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد هما متساويان

لكن اب س د اسطوانة وليكن ي ف جسمًا متوازي السطوح والقاعدة اغ ب



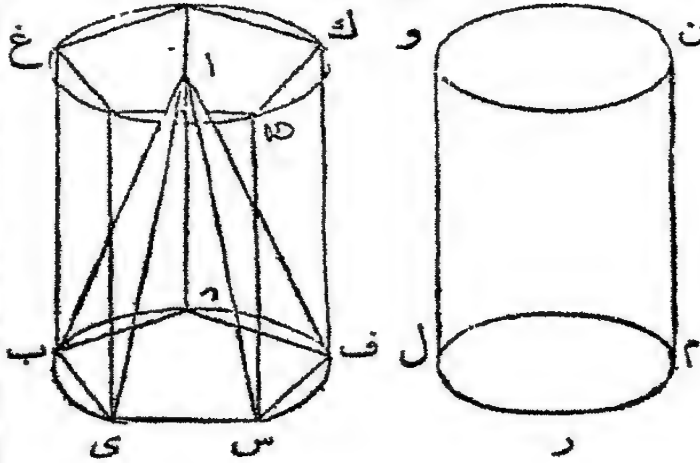
فلتعدل القاعدة
ي ح وليكن علو
الجسمين واحدًا
فالاسطوانة
اب س د تعدل
الجسم ي ف
والا فلتكن
الاسطوانة اصغر

من الجسم ي ف . وليفصل من ي ف جزء ي ق يعدل الاسطوانة اب س د .
وذلك بواسطة سطح ت ق الذي يوازي ن ف ثم ارسم في دائرة اغ ب شكلاً كثير
الاضلاع اغ ك ب ل م ويكون الفرق بينه وبين الدائرة اقل من الشكل ت ح
(ق ٤ ك ١ فرع ١ م) وافصل من ي ح جزءاً ور = اغ ك ب ل م . فتقع النقطة ر
بين ت ون ثم ارسم على اغ ك ب ل م موشوراً اغ ب س د على علو الاسطوانة
فيكون اصغر منها (ق ١٦ ك ٢ م) ثم ليمر السطح ر ص في النقطة ر وليوازي ن ف
فيقطع من ي ف الجسم ي ص = الموشور اغ ب س د (ق ٨ ك ٢ فرع ٢ م) لانها
متساويان في القاعدة والعلو والموشور هو اصغر من الاسطوانة وفرض ان
الاسطوانة = ي ق اذا ي ص هو اصغر من ي ق وذاك محال فلا يمكن ان تكون
الاسطوانة اصغر من ي ف . وعلى هذا الاسلوب يبرهن انها ليست اكبر من ي ف

القضية الثامنة عشرة. ن

إذا كانت اسطوانة ومخروط على قاعدة واحدة وعلى علو واحد
فالمخروط ثلث الاسطوانة

ليكن المخروط ا ب س د والاسطوانة ب ف ك غ على قاعدة واحدة هي الدائرة
ب س د وعلى علو واحد ن
هو العمود من ا على سطح
القاعدة ب س د فالمخروط
ا ب س د انما هو ثلث
الاسطوانة ب ف ك غ
والا فليكن المخروط
ا ب س د ثلث اسطوانة
اخرى ل م ن و علوها مثل



علو الاسطوانة ب ف ك غ ولكن القاعدة ل ر م ليست مثل القاعدة ب س د
واولا لتكن ب س د اكبر من ل ر م

ثم لان الدائرة ب س د اكبر من الدائرة ل ر م فيمكن ان يرسم في ب س د
شكل كثير الاضلاع فضلتهما اصغر من فضلة ب س د ول ر م (ق ٤ ك ا م)
ليكن ب ي س ف د ذلك الشكل وليبن عليه الهرم ا ب ي س ف د والموشور
ب س ف ك ح غ

فلكون الشكل الكثير الاضلاع ب ي س ف د اعظم من الدائرة ل ر م يكون
الموشور ب س ف ك ح غ اعظم من الاسطوانة ل م ن و لان لها علوا واحدا ولكن
قاعدة الموشور اكبر من قاعدة الاسطوانة. ولكن الهرم ا ب ي س ف د هو ثلث الموشور
ب س ف ك ح غ (ق ١١ ك ٢ م) فهو اعظم من ثلث الاسطوانة ل م ن و. وقد
فرض ان المخروط ا ب س د هو ثلث الاسطوانة ل م ن و. فالهرم ا ب س ف د
اعظم من المخروط ا ب س د وهو ايضا اصغر منه وذاك محال فالمخروط ا ب س د
ليس اقل من ثلث الاسطوانة ب ف ك غ. وعلى هذا الاسلوب اذا رسم شكل كثير

إذا كان نصف كُرّةٍ ومخروطٌ على قاعدتين متساويتين وعلى علوّ واحدٍ فيمكن أن تُرسم في نصف الكرة عدّة أساطين وعدّة أخرى محيطة بالمخروط كلها على علوّ واحدٍ وفضلة مجتمعتها ومجتمع نصف الكرة والمخروط يعدل جسماً أصغر من جسم مفروض

د ب و د ا م ر ع ي ن
ع ل ي د س . ا ر س م
س ي . و ل ي د م
الشكل كله على
د س . ف ا ل ق ط ا ع
ب س د ال ذي
هو نصف نصف

الدائرة ا د ب يرسم نصف كرة مركزها س (حد ٧ ك ٢ م) والمثلث س د ي يرسم
مخروطاً راسه س وقاعدته الدائرة المرسومة بالمخط د ي (حد ١١ ك ٢ م) التي تعدل
المرسومة بالمخط ب س الذي هو قاعدة نصف الكرة ولتكن ع جسماً ما. فيمكن ان
ترسم عدة اساطين في نصف الكرة ا د ب و عدة اخرى تحيط بالمخروط ي س ث
وتكون فضلة مجتمعهما ومجتمع المخروط ونصف الكرة اصغر من ع الجسم المفروض

[illegible]

غ و ح ت و س ب وايضاً ٣ ص و ٢ ٧ و ٦ ا عمودية على الخطوط المذكورة
 فبعد اتمام هذا الرسم ان دار الجميع حول س د فالاشكل المتوازية الاضلاع والقائمة
 الزوايا ق ٨ و غ ٥ و ح ٩ تُحدث بدورانها اساطين (حد ١ ك ٢ م) في نصف
 الكرة ب د ا والاشكال دن ق ٦ غ ٧ ح ص تُحدث اساطين محيطية بالمخروط
 ث س ي. فيمكن ان يبرهن كما في المواشير المرسومة في هرم (ق ١٢ ك ٢ م) ان مجتمع
 كل الاساطين في نصف الكرة هو اقل من نصف الكرة بمقدار جسم اصغر من
 الاسطوانة المحاذية من دوران ح ب اي اصغر من ع لان ح ب قد فرض اصغر من
 ع. وهكذا يبرهن ايضاً ان مجتمع الاساطين المحيطية بالمخروط ث س ي هو اكبر من
 المخروط بمقدار جسم اصغر من الاسطوانة المحاذية من دوران دن ا يه جسم اصغر
 من ع. فلكون مجتمع الاساطين المرسومة في نصف الكرة مع جسم اصغر من ع يعدل
 نصف الكرة ولكون مجتمع الاساطين المحيطية بالمخروط يبدل المخروط مع جسم
 اصغر من ع فبإضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية مجتمع هذه الاساطين مع
 جسم اصغر من ع يعدل مجتمع نصف الكرة والمخروط مع جسم اصغر من ع. ففضلة
 مجتمع كل الاساطين ومجتمع نصف الكرة والمخروط يعدل فضلة جسمين كل واحد
 منهما اصغر من ع فلا بد ان تكون هذه الفضلة ايضاً اصغر من ع

القضية العشرون . ن

اذا فرض ما فرض في القضية السابقة فجميع الاساطين في نصف
 الكرة والمحيطية بالمخروط يعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو
 نصف الكرة وقاعدته

ليتم الرسم كما في القضية السابقة فجميع الاساطين المحاذية من دوران اشكال
 ح ٩ غ ٥ ق ٨ اي الواقعة في نصف الكرة مع المحاذية من دوران الاشكال
 ح ص غ ٧ ق ٦ ودن اي المحيطية بالمخروط يعدل الاسطوانة المحاذية من دوران
 الشكل ب د. لتكن ل نقطة التقاء غ و محيط الدائرة فلان س غ ل قائمة فان
 أوصل بين س ول فالداعرتان المرسومتان على نصف القطر س غ و غ ل تعدلان
 الدائرة المرسومة على نصف القطر س ل او غ و (ق ٦ ك ١ ف ٢ م) وس غ =

غ ٢ لان س د = دى قال الدائرتان المرسومتان على نصف القطر ع ٢ وغ ل معاً
تعدلان الدائرة المرسومة على نصف النعارج و اى الدائرتان المرسومتان بدوران
غ ٢ وغ ل على نقطة غ ها معاً تعدلان الدائرة المرسومة بدوران غ و على تلك
النقطة. فالاسطوانتان الواقفتان على الدائرتين المذكورتين اذ كان لهما علو واحد
غ ح تعدلان القائمة على الدائرة الاخرى التي لها ايضاً علو غ ح. فالاساطين الحادثة
من دوران غ ٥ وغ ٧ تعدل الحادة من دوران غ ث وهكذا يُبرهن في الجميع
فالاساطين الحادثة من دوران ح ٩ غ ٥ ق ٨ وح ص غ ٧ ق ٦ ود ن
تعدل الحادة من دوران ب د اى تعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو
نصف الكرة وقاعدته

القضية الحادية والعشرون . ن

الكرة هي ثلثا الاسطوانة المحيطة بها

ليرسم كما في القضية السابقة. فان لم يكن نصف الكرة الحادث من دوران
ب د س ثلثي الاسطوانة الحادثة من دوران ب د فلنفرضه أكبر من ذلك بمقدار
جسم ع. ثم لأن المخروط الحادث من دوران س دى هو ثلث الاسطوانة المشار اليها
(ق ١٨ ك ٢ م) فيكون نصف الكرة والمخروط معاً أكبر من الاسطوانة بمقدار جسم
ع. ولكن هذه الاسطوانة تعدل مجتمع الاساطين الحادثة من دوران الاشكال ح ص
غ ٥ الخ (ق ٢٠ ك ٢ م) فجميع نصف الكرة والمخروط هو أكبر من مجتمع هذه
الاساطين بمقدار جسم ع وذاك محال لانه قد تهرن (ق ١٩ ك ٢ م) ان فضلة
مجتمع نصف الكرة والمخروط ومجتمع الاساطين يعدل جسماً اصغر من ع ف نصف
الكرة يعدل ثلثي الاسطوانة الحادثة من دوران ب د فكل الكرة ثلثا الاسطوانة
الحادثة من مضاعف ب د اى ثلثا الاسطوانة المحيطة بها

اصول قياس المثلثات البسيطة

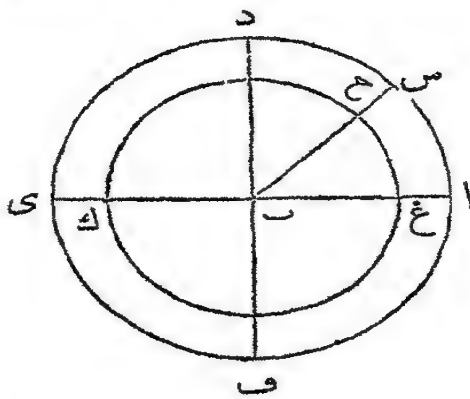
اصول قياس المثلثات البسيطة تنقسم الى ثلاثة اقسام. القسم الاول اوضح المبادئ. الثاني قواعد العمل. والثالث كيفية اصطلاح الجداول مع بعض النظريات المسهلة لبعض العايات العسرة

القسم الاول

سابقة اولى

نسبة زاوية في مركز دائرة الى اربع زوايا قائمة كنسبة القوس الذي يقابلها الى محيط الدائرة

لتكن ا ب س زاوية عند مركز الدائرة ا س ي ف واس القوس المقابل لها، فنسبة



ا ب س : اربع زوايا قائمة :: ا س : محيط

الدائرة ا س ي ف. اخرج ا ب حتى يلاقي

المحيط في ي وارسم د ب ف عموداً على ا.

فالزاويتان ا ب س ا ب د هما عند مركز

دائرة واحدة ونسبة ا ب س : ا ب د :: القوس

ا س : القوس ا د (ق ٢٢ ك ٦) ونسبة الزاوية

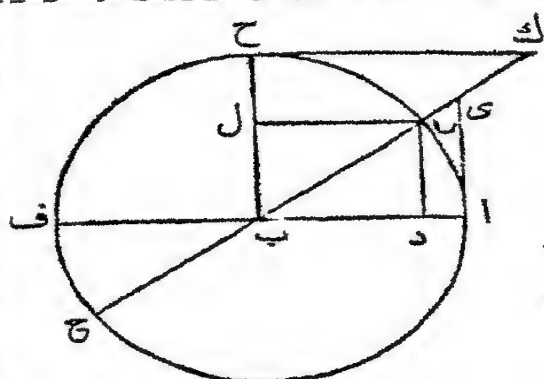
ا ب س : اربعة امثال ا ب د :: ا س : اربعة

امثال ا د (ق ٤ ك ٥) واب د قائمة. فاربعة امثال ا د يعدل كل المحيط ا س ي ف

فنسبة AB إلى S : اربع زوايا قائمة :: القوس AS : المحيط AD في
 فرع. الزوايا المتساوية عند مراكز دوائر مختلفة بين اقواسها ذات النسبة التي
 بين محيطات الدوائر. الزاوية AB إلى S عند مركز الدائرتين AD في GH ك ويقابلها
 القوس AS من الواحدة والقوس GH من الاخرى ونسبة AS الى محيط الدائرة
 AD كنسبة AB إلى S الى اربع زوايا قائمة ونسبة GH الى محيط الدائرة GH ك
 كنسبة AB إلى S الى اربع زوايا قائمة

حدود

- ١ اذا تقاطع خطان مستقيمان في مركز دائرة فالقوس الواقع بينهما هو قياس
 الزاوية المحاذية بينهما. فالقوس AS هو قياس الزاوية AB إلى S
- ٢ اذا انقسم محيط دائرة الى ٣٦٠ قسماً متساوياً فكل قسم يسمى درجة وإذا
 انقسمت الدرجة الى ستين قسماً متساوياً فكل واحد يسمى دقيقة والدقيقة تُقسم الى
 ستين قسماً متساوياً تسمى ثواني والثانية الى ستين قسماً متساوياً تسمى ثوانك وهكذا
 الى ما لا نهاية له. والدرجات والدقائق والثواني الى اخره في قوس هي نفس
 الدرجات والدقائق والثواني في الزاوية التي يقيسها ذلك القوس
 فرع اول. نسبة قوس الى المحيط الذي هو قسم منه كنسبة درجاته واجزائه
 درجاته الى ٣٦٠ ونسبة زاوية الى اربع زوايا قائمة كنسبة درجات قوسها واجزائه
 درجاته الى ٣٦٠
- فرع ثانٍ. الاقواس التي تقيس زاوية واحدة هي متماثلة في عدد درجاتها واجزائه
 درجاتها
- الدرجات والدقائق والثواني الخ في قوس او زاوية تُكتب هكذا ٤٩° ٢٦' ٢٤"
 الخ وتقرأ ٤٩ درجة و٢٦ دقيقة و٢٤ ثانية و٤٢ ثالثة الخ
- ٣ اذا عدلت زاويتان معاً قائمتين فكل واحدة تسمى مُتِمَّة الاخرى وهكذا في
 قوسين عدلاً معاً نصف دائرة فكل واحد منها مُتِمَّة الآخر
- ٤ الخط المستقيم المرسوم من طرف قوس مثل الخط ND عموداً على القطر
 المار بالطرف الآخر من القوس هو جيب القوس AN او جيب الزاوية AB التي



كان القوس ان قياسها
 فرع اول . جيب ربع دائرة او قائمة
 يعدل نصف القطر
 فرع ثان . جيب قوس هو نصف وتر
 مضاعف القوس كما يتضح من اخراج الجيب
 حتى يلاقي المحيط

٥ القسم من القطر الواقع بين الجيب والمحيط مثل دا يسمى سهم الجيب
 للقوس ان اول للزاوية ا ب ن

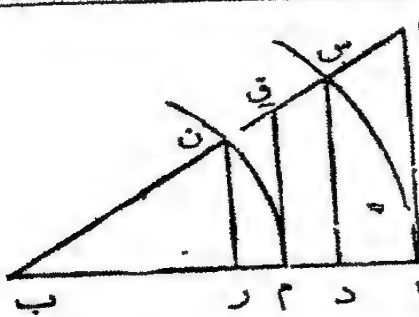
٦ الخط المستقيم الذي يمس طرف قوس مثل الخط ي ا الذي يمس طرف
 القوس ن ا ويلقي القطر المار بطرفه الاخر مثل ب ي يسمى مماس القوس ان او
 الزاوية ا ب ن

فرع . مماس نصف قائمة يعدل نصف القطر
 ٧ الخط المستقيم ب ي بين المركز وطرف المماس يسمى قاطع القوس ن ا او
 الزاوية ا ب ن

فرع . للحد الرابع والسادس والسابع . جيب زاوية ما مثل ا ب ن ومماسها
 وقاطعها هو ايضا جيب ومماس وقاطع لمتماثلان ب ف
 الامر واضح من الحد الرابع ان ن د هو جيب الزاوية ن ب ف . اخرج ن ب
 حتى يلاقي المحيط في ج . فيتضح ان ي ا هو مماس وب ي قاطع للزاوية ا ب ج او
 ن ب ف (حد ٦ و ٧)

فرع . للحد الرابع والخامس والسادس والسابع . نسبة جيب قوس ما وسهم جيبه
 ومماسه وقاطعه التي تقيس زاوية ما الى جيب قوس آخر وسهم جيبه ومماسه وقاطعه
 التي تقيس تلك الزاوية ذاتها كنسبة نصف قطر القوس الاول الى نصف قطر
 القوس الثاني

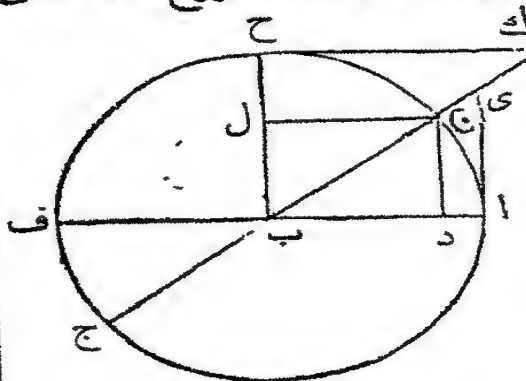
ليكن اس وم ن قياسين للزاوية ا ب س حسب الحد الاول وليكن س د
 الجيب ود اسهم الجيب وي ا المماس وب ي القاطع للقوس اس (حد ٤ و ٥ و ٦ و ٧)
 وليكن ر الجيب ورم سهم الجيب وم ق المماس وب ق القاطع للقوس م ن فلكون
 ن ر ق م س د ي ا متوازية تكون نسبة س د : ن ر :: نصف القطر س ب :



نصف القطر ن ب ونسبة اى : م ق :: نصف
القطر ا ب : نصف القطر ب م وبى : ب ق ::
ا ب : ب م ولان ب س : ب د :: ب ن : ب ر
اوب ا : ب د :: ب م : ب ر فبالقلب والمبادلة
ا د : م ر :: ا ب : ب م . فالفرع واضح . واذا

اصطنعت جداول دالة على نسبة الجيب وسهم الجيب والمماس والقاطع لزواية ما الى
نصف قطر مفروض فهي تدل ايضا على نسبة هذا الجيب وسهمه الى اخرو من
تلك الزاوية الى اى نصف قطر فرض . وقد جرت العادة في تلك الجداول ان
يحسب نصف القطر واحداً او حلقة من السلسلة ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ الى اخرو
وسياتى ابضاح ذلك في موضعه

٨ فضلة زاوية ما وزاوية قائمة تسمى كمالها وفضلة قوس ما وربع دائرة يسمى
كماله . فاذا كان ب ح عموداً على ا ب تكون
الزاوية ح ب ن كمال الزاوية ا ب ن
والقوس ح ن كمال القوس ن ا والزاوية
ح ب ن كمال الزاوية المنفرجة ف ب ن
والقوس ح ن كمال القوس ف ح ن
٩ نظير الجيب ونظير المماس ونظير



القاطع لزواية هي الجيب والمماس والقاطع لكمال تلك الزاوية . فاذا كان ن د جيب
الزاوية ا ب ن وى امامها وبى قاطعها يكون ن ل نظير الجيب وك ح نظير
المماس وب ك نظير القاطع لها

فرع اول . نصف القطر هو متناسب متوسط بين المماس ونظير المماس لزواية
ما فماس ا ب ن \times نظير ماس ا ب ن = مربع نصف القطر

لان ح ك وب امتوازيان فالزاويتان ح ك ب ا ب ن متساويتان وك ح ب
وب اى قائمتان فالمثلثان ب اى ب ح ك متشابهان واى : ا ب :: ب ح او
ا ب : ح ك

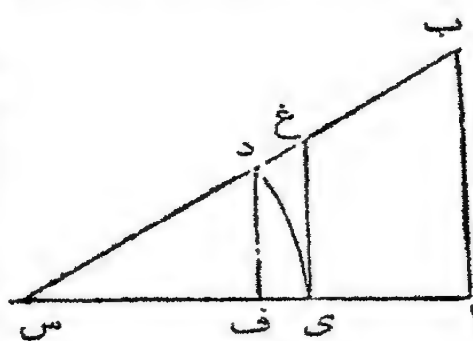
فرع ثان . نصف القطر متناسب متوسط بين نظير الجيب والقاطع لزواية ما
اي نظير جيب ا ب ن \times قاطع ا ب ن = مربع نصف القطر

لأن د بوازي ي ا فنسبة ب د : ب ن او ب ا :: ب ا : ب ي
 تنبيه . لاجل الاختصار يُدَلُّ على نصف القطر هكذا $\frac{ق}{٢}$ وعلى
 الجيب هكذا ج وعلى المماس هكذا م وعلى القاطع هكذا ق ا وعلى سهم
 الجيب هكذا س ج وعلى نظير الجيب والمماس والقاطع هكذا نج م نقا

القضية الاولى . ن

في مثلث بسيط قائم الزاوية تكون نسبة الوتر الى احد الضلعين
 كنصف القطر الى جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع . ونسبة ضلع
 الى الضلع الاخر كنسبة نصف القطر الى مماس الزاوية المقابلة ذلك
 الضلع

ليكن ا ب س مثلثا بسيطا قائم الزاوية وب س وتره . اجعل س مركزا وس د
 مثلا نصف قطري وارسم القوس د ي . ارسم
 د ف عمودا على س ي ومن ي ارسم المماس
 ي غ الذي يلاقى س ب في غ فيكون د ف
 جيبا و غ ي مماسا للقوس د ي او للزاوية
 عند س



المثلثان د ف س ب ا س متساويا
 الزوايا لأن د ف س وب ا س قائمتان والزاوية عند س مشتركة بين المثلثين .
 فنسبة س ب : ب ا :: س د : د ف وس د هو نصف القطر ود ف جيب الزاوية
 عند س (حد ٤) فنسبة س ب : ب ا :: $\frac{ق}{٢}$: ج س

ولأن ي غ مماس الدائرة في ي فالزاوية غ ي س قائمة وتعديل ب ا س والزاوية
 عند س مشتركة بين المثلثين غ ي س ب ا س فهما متساويا الزوايا ونسبة س ا :
 ا ب :: س ي : ي غ وس ي نصف قطر وي غ مماس الزاوية عند س فنسبة

س ا: ب :: ق: م س

فرع اول. نسبة نصف القطر الى قاطع الزاوية عند س كنسبة الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى الوتر

لان س غ قاطع الزاوية عند س (حد ٧) والمثلثان س غ ي س ب ا متساويا الزوايا فنسبة س ا: س ب :: س ي: س غ او س ا: س ب :: ق: م س

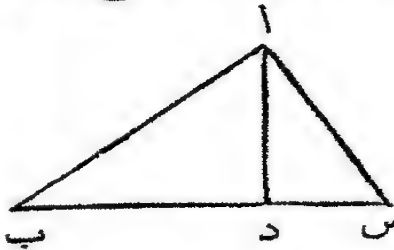
فرع ثان. حسب القضية السابقة وفرعها لو فرض نصف القطر واحداً كان

جس = $\frac{اب}{ب س}$ ومم س = $\frac{اب}{اس}$ وقاس = $\frac{ب س}{اس}$ ولان جس = نجب

(لان الزاوية عند ب كمال الزاوية عند س) فلنا نجب = $\frac{اب}{ب س}$

ونجب س = $\frac{اس}{ب س}$

فرع ثالث. في كل مثلث اذا رسم عموداً من احدى زواياه الى الضلع المقابل تكون نسبة احد قسي ذلك الضلع الى القسم الآخر منه كنسبة مماس احد الزوايا على جانب العمود الى مماس الاخرى



في المثلث ا ب س يرسم ا د عموداً من ا على س

ب س فكل من المثلثين ا د ب ا د س ذو قائمة ونسبة ا د: د س :: ق: م

س ا د و ا د: د ب :: ق: م د ا ب وبالمساواة د س: د ب :: م س ا د: م ب ا د

تعليقة. يسهل علينا حفظ هذه القضية بملاحظة امرين اولهما انه في مثلث ذي

قائمة اذا جعل الوتر نصف قطر يصير كل من الضلعين جيب الزاوية التي تقابلة.

والثاني انه اذا جعل احد الضلعين نصف قطر يصير الضلع الاخر مماساً للزاوية

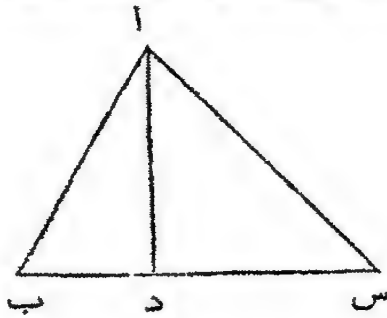
التي تقابلة والوتر قاطعاً لها

القضية الثانية. ن

نسبة اضلاع مثلث بسيط بعضها الى بعض كنسبة جيوب الزوايا التي

تقابل تلك الاضلاع بعضها الى بعض

ليكن $اب$ س مثلثاً ومن الزاوية $ا$ ارسم $اد$ ودًا على $ب$ س. فالمثلث $اب$ د
له قائمة عند $د$ ونسبة $اب : اد :: ق : ج$ ب
ولهذا السبب ايضاً $اس : اد :: ق : ج$ س
وبالقلب $اد : اس :: ج : ق$ وبالعكس
والمساواة $اب : اس :: ج : ق$ وبهكذا
يبرهن ان $اب : ب : س :: ج : د$

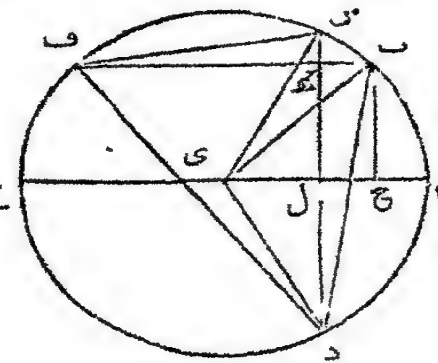


القضية الثالثة. ن

إذا فرض قوسان من دائرة تكون نسبة مجموع جيبيهما الى فضله جيبيهما
كنسبة مماس نصف مجموعهما الى مماس نصف فضلهما

ليكن $اب$ واس قوسين من الدائرة $اب$ س د والنتطة $ي$ مركزها و $اي$ غ
قطرها فنسبة $جاس + جاب : جاس - جاب :: مم ا (اس - اب) : مم ا (اس + اب)$
وبالقي المحيط في $ف$ وارسم $ب$ ح و $س$ ل
عمودين على $اي$. فهما جيبا القوسين $اب$
واس. اخرج $س$ ل حتى يلاقي المحيط في $د$
وارسم $د$ ف $دي$ $د$ ب $ف$ س $ي$ ب $ي$ ن

لكون $ي$ ل قد رسم من المركز عموداً على $س$ د فهو ينصف $س$ د في النقطة $ل$
والقوس $س$ ا د في $ا$ و $د$ ل = $ل$ س الذي هو جيب القوس $اس$. وب $ح$ اول ك
جيب القوس $اب$ فالخط $د$ ك يجمع جيب القوسين المفروضين $وس$ ك فضلهما
ود $اب$ مجموع القوسين $وب$ س فضلهما. وفي امثالث $د$ ف $س$ ل تكون $ف$ ك عموداً
على $د$ س تكون نسبة $د$ ك : ك س :: مم د ف ك : مم س ف ك (فرع ثالث ق ١)
ولكن مماس $د$ ف ك = مم ا قوس $ب$ د لان $د$ ف ك نصف $دي$ ب (ق ٢ ك ٢)



فقياسها نصف ب د . ولهذا السبب ايضا م س ف ك = م م ا ب س . فنسبة د ك :
 ك س :: م ا ب د : م ا ب س . ولكن د ك مجتمع جيبى القوسين ا ب و ا س
 وك س فضلتهما . وب د مجتمع القوسين ا ب و ا س وب س فضلتهما . فنسبة ج د ا س
 + ج ا ب : ج ا س - ج ا ب :: م ا ب (ا ب + ا س) : م ا ب (ا س - ا ب)
 فرع اول . لكون ي ل نظير جيب ا س و ي ح نظير جيب ا ب يكون ف ك
 مجتمعها وك ب فضلتهما . لان ف ك = ا ب ف ب + ي ل = ي ح + ي ل وك ب =
 ل ح = ي ح - ي ل ونسبة ف ك : ك ب :: م ف د ك : م ب د ك وماس د ف ك =
 م ب د ك لان د ف ك كمال ف د ك فتكون نسبة ف ك : ك ب :: م د ف ك :
 م ب د ك او ف ك : ك ب :: م ا ب القوس د ب : م ا ب القوس ب س . اية نسبة
 مجتمع نظير الجيبين لقوسين الى فضلة نظير الجيبين كنسبة نظير الماس لنصف مجتمع
 القوسين الى ماس نصف فضلتهما

فرع ثان . في المثلث القائم الزاوية ف ك د نسبة ف ك : ك د :: ق : م د ف ك
 ولكن ف ك = نج ا ب + نج ا س وك د = ج ا ب + ج ا س وم د ف ك =
 م ا ب (ا ب + ا س) فنسبة نج ا ب + نج ا س : ج ا ب + ج ا س :: ق :
 م ا ب (ا ب + ا س)

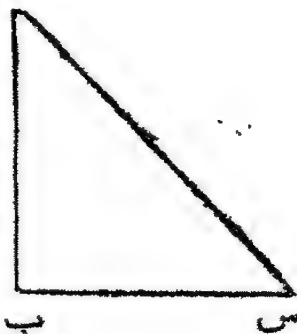
وهكذا بواسطة المثلث ف ك س يبرهن ان نج ا ب + نج ا س : ج ا س -
 ج ا ب :: ق : م ا ب (ا ب - ا س)

فرع ثالث . اذا كان مجتمع القوسين ا ب و ا س ٩٠ فماس نصف فضلتهما اى
 ماس ٤٥ يماثل نصف القطر . والقوس ب س لكونه فضلة د س ود ب او فضلة
 د ب و ٩٠ فنصف القوس ب س يماثل فضلة نصف د س ونصف د ب او فضلة
 ا س و ٤٥ . فاذا كان مجتمع قوسين ٩٠ تكون نسبة مجتمع جيبى القوسين الى
 فضلتهما كنسبة نصف القطر الى ماس فضلة احدها و ٤٥

القضية الرابعة. ن

نسبة مجموع ضلعي مثلث الى فضلتها كحاصل نصف مجموع الزاويتين
المقابلتين للضلعين الى حاصل نصف فضلتها

ليكن AB BC مثلثا بسيطا فنسبة $AB : BC :: AB + AC : AB - AC :: AM : (B + C)$
 $AM : (B - C)$



لأن (ق ٢) $AB : BC :: AB + AC : AB - AC$ ولذلك
 (ق ٥ ك) $AB : BC :: AB + AC : AB - AC$
 $AB - BC : BC :: AB - AC : AB + AC$
 $AB - BC : BC :: (B + C) : (B - C)$
 فإذا (ق ١ ك) $AB : BC :: AB + AC : AB - AC :: AM : (B + C)$
 $AM : (B - C)$

القضية الخامسة. ن

إذا رُسم عمود من زاوية مثلث على القاعدة فنسبة مجموع قسمي القاعدة
الى مجموع الضلعين الآخرين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة قسمي
القاعدة

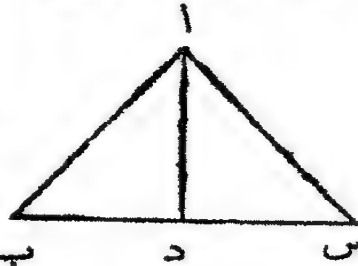
لأنه حسب (ق ٦ ك) القائم الزوايا مسطح مجموع القسمين في فضلتها يعدل
 القائم الزوايا مسطح مجموع الضلعين في فضلتها فحسب (ق ٦ ك) نسبة مجموع
 القسمين الى مجموع الضلعين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة القسمين

القضية السادسة. ن

في كل مثلث نسبة مضاعف القائم الزوايا مسطح ضلعين من اضلاعه
الى فضلة مجموع مربعيها ومربع القاعدة كنسبة نصف القطر الى نظير
جيب الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن ab س مثلثا فنسبة القائم الزوايا ٢ $ab \times b$ س : $(ab^2 + b^2)$ -

$اس^2 :: \frac{ق}{٢} : نجب$



من ا رسم ا د عمودا على ب س . فضلة المربعين

على ا ب و ب س والمربع على اس يعدل ٢ $ab \times b$ س

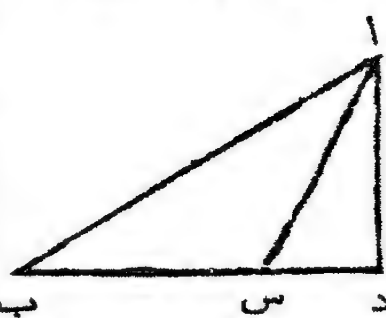
ب د (ق ١٢ و ١٢ ك ٢) ولكن ب س \times ب ا : س

ب س \times ب د :: ب ا : ب د :: $\frac{ق}{٢} : نجب$. فاذا ٢ $ab \times b$ س : ب ا :

٢ $ab \times b$ س \times ب د :: $\frac{ق}{٢} : نجب$ و ٢ $ab \times b$ س \times ب د هو فضلة ا ب + ب س

واس فاذا ٢ $ab \times b$ س : $(ab^2 + b^2)$ - $اس^2 :: \frac{ق}{٢} : نجب$

فرع . اذا فرض $\frac{ق}{٢} = ا$ فلنا ب د =



ب ا \times نجب (ق ١) و ٢ $ab \times b$ س \times ب ا \times نجب

ب = ٢ $ab \times b$ س \times ب د فاذا كانت ب حادة لنا

٢ $ab \times b$ س \times ب ا \times نجب = ب س + ب ا -

اس واذا اضيف اس الى الجانبيين تصيرا س +

٢ $ab \times b$ س \times ب ا = ب س + ب ا وبطرح ٢ $ab \times b$ س \times ب ا من

الجانبيين تصيرا س = ب س - ٢ $ab \times b$ س \times ب ا + ب ا فاذا اس =

$(ب س - ٢ $ab \times b$ س \times ب ا + ب ا)$

واذا كانت ب منفرجة يبرهن على هذا الاسلوب ان اس = $(ب س + ٢ $ab \times b$ س \times ب ا + ب ا)$

ب \times ب س \times ب ا + ب ا



القضية السابعة . ن

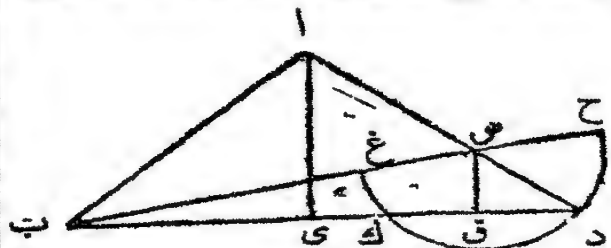
نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا مسطح الضلع الاخر مع فضلة الضلعين في ذلك الضلع الا فضلة الضلعين كنسبة مربع نصف القطر الى مربع جيب نصف الزاوية الواقعة بين الضلعين

لیکن اب س مثلثاً قاعدتہ ب س و اب اطول ضلعیہ فنسیہ ۴ اب × اس :

(ب س + (ا ب - ا س)) ×

(ب س - ا ب - ا س) ::

۲۱۳ | ۲: (ج ۱/۳ ب اس) ۲



اخرج اس الى د حتى ان ادسا ب . ا رسم ب د وارسم اى وس ق عمودين
على ب د . واجعل س مركزا وس د نصف قطر وارسم نصف الدائرة غ د ح الذي
يقطع ب د في ك وب س في غ ويلاقي ب س بعد اخراجه في ح

الامرواضح ان س د هو فضلة الضلعين وب ح هو القاعدة مع فضلة الضلعين
وب غ القاعدة الا فضلة الضلعين. ولكون المثلث ب ا د متساوي الساقين يكون
د ي نصف ب د و د ق نصف د ك و د ي - د ق = نصف ب د - د ك (ق ٦ ك ٥)
او ي ق = $\frac{1}{2}$ ب ك. ولكون ا ي يوازي س ق تكون نسبة ا س : ا د :: ي ق : ي د
(ق ٢ ك ٦) والاشكال القائمة الزوايا اذا كانت على علق واحد هي كنسبة قواعدھا
بعضھا الى بعض فنسبة ا س \times ا د : ا د : ا د :: ي ق \times ي د : ي د : ي د (ق ١ ك ٦)
و ا س \times ا د : ا د : ا د :: ي ق \times ي د : ي د : ي د وبالمبادلة ا س \times ا د : ا د : ي ق \times
ي د :: ا د : ي د

ولكون ϵ ي ق = ا ب ك و ϵ ي ق × د = ا ب ك × د = ا ب ك × د
ب ك = د ب × ب ك = ح ب × ب غ فنسبة ϵ اس × اد : دب × ب ك ::
اد : ي د . ولكن اد : ي د :: $\frac{ق}{ا} :$ جى اس = ج $\frac{ا}{ب}$ باس (ق ا)
واد : ي د :: $\frac{ق}{ا} :$ (ج $\frac{ا}{ب}$ باس) فاذا (ق ا لكه) ϵ اس × اد :
ح ب × ب غ :: $\frac{ق}{ا} :$ (ج $\frac{ا}{ب}$ باس) او (لان اب = اد) ϵ اس ×
اب : ح ب × ب غ :: $\frac{ق}{ا} :$ (ج $\frac{ا}{ب}$ باس) و ϵ اس × اب هو اربعة
امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي المثلث وح ب × ب غ هو القائم الزوايا ب س +
(اب - اس) × ب س - (اب - اس)

فرع. اذا كسا اس × ا د = ح ب × ب ع :: ج $\frac{ق}{ا}$: ب $\frac{س}{ب}$ اس

القضية الثامنة. ن

نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا
مسطح مجتمعا الضلعين مع القاعدة في مجتمع الضلعين الا القاعدة كنسبة
مربع نصف القطر الى مربع نظير جيب نصف الزاوية الواقعة بين
الضلعين

ليكن a, b, c مثلثاً فاعدته a, b, c و a, b, c أطول الضلعين الآخرين فنسبة

۱۴ب × ۱س : (۱ب + ۱س) +

ب س) × (ا ب + ا س - ب س) ::

ق ۱۶: (نہج ۱/۶ ب اس)

اجعل س مرکزاً وس ب نصف

قطر وارسم الدائرة ب ل م محيطها

یلاقی سے ابعد اخراجہ فی لوم۔

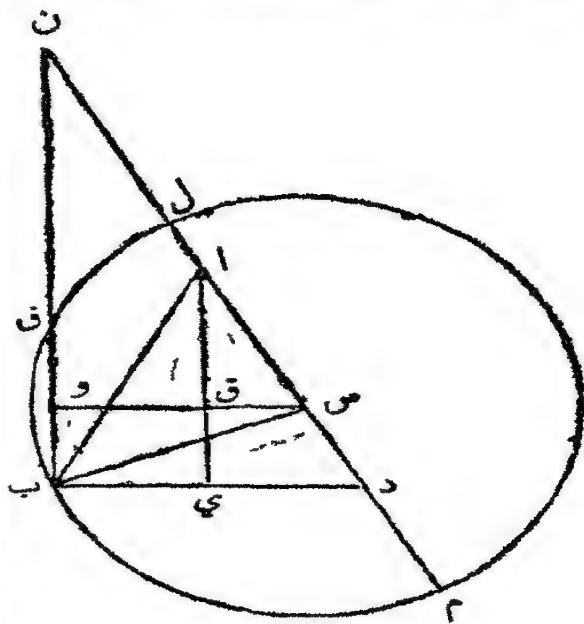
اخرج ال الى ن حتى ان ان = اب

واجعل اد = اب ثم ا رسم ای عموداً

على ب د . ارسم ب ن وليلاقي المحيط

ایضاً فی ف ولیکن س وعموداً علی

ب ن و ل ی ل ا ق ا ی ف ی ق



الامرواضح ان م = اب + اس + بس ول ن = اب + اس - بس

ولأنَّ ب د قد تنصَّف في ي ود ن قد تنصَّف في ا فالخطُّ ب ن يوازيه ا ي فهو

عمود علی ب د والمثلثان د ای د ن ب متساویا الزویا ودن = ۱۲ د وب ن =

۱۲ ای وب ف = ۲ بت و = ۲ ق ی و ف ن = ۲ اق

ولكون اق س اى دمتساوي الزوايا تكون نسبة اس : اد :: اق : اى

والاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علو واحد هي كقواعدها

بعضها الى بعض (قالك ٦) فنسبة اس × اد : اد :: ابي × اي : اي^٢

وبالمبادلة اس × اد : اق × اى :: اد : اى و اس × اد : اق × اى ::
 اد : اى. ولكن اق × اى = اق × اى = اق × اى = اق × اى = اق × اى = اق × اى
 فاذا اس × اد : من × نل :: اد : اى ولكن اد : اى :: ق : نجداى =
 نجداى : باس (ق ا). فاذا اس × اد : من × نل :: ق : باس (ق ا)
 و اس × اد هو اربعة امثال القائم الزوايا مسطح اس × اب (لان اد = اب)
 ومن × نل هو القائم الزوايا مسطح الضلعين مع القاعدة في الضلعين الا القاعدة
 فرغ اول. اذا ٢ اس × اب : من × نل :: ق : ج ا باس
 فرغ ثان. حسب القضية السابعة ٤ اس × اب : (ب س + اب - اس) ×
 (ب س - اب - اس) :: ق : (ج ا باس) وقد تبرهن في هذه القضية
 ان ٤ اس × اب : (اب + اس + ب س) × (اب + اس - ب س) ::
 ق : (نجداى باس) فبالمساواة (اب + اس + ب س) × (اب + اس - ب س) ::
 (ب س + اب - اس) × (ب س - اب - اس) :: (نجداى باس)
 (ج ا باس) ولكن نسبة نظير جيب قوس الى جيب القوس كنسبة نصف
 القطر الى ماس ذلك القوس فاذا (اب + اس + ب س) × (اب +
 اس - ب س) : (ب س + اب - اس) × (ب س - اب - اس) ::
 ق : (م باس) و ٢ (اب + اس + ب س) × (اب + اس - ب س) ::
 (ب س + اب - اس) × (ب س - اب - اس) :: ق : م باس

سابقة ثانية

اذا فرض مقداران غير متساويين فنصف مجتمعهما مع نصف فصلتهما
 يعدل اكبرها ونصف مجتمعهما الا نصف فصلتهما يعدل اصغرهما

ليكن اب وب س مقدارين وليكن س ب د د ي
 اب اكبرها. نصف اس في د واجعل اى يعدل ب س. فالامرواضع ان اس

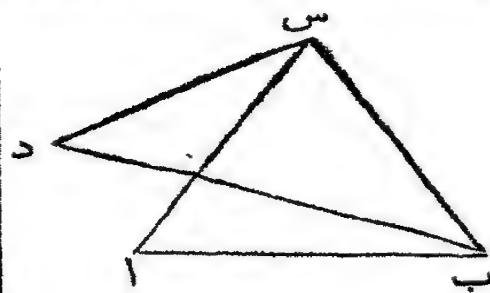
هو مجتمع المقدارين وى ب فضلتهما . ولكون اس قد تنصف في د ا د = د س
واى = ب س فاذا دى = د ب ودى او د ب نصف فضلة المقدارين . ولكن
اب = ب د ودا اي نصف المجتمع مع نصف الفضلة وب س = نصف المجتمع د س
الا نصف الفضلة ب د

فرع . اذا فرض مجتمع مقدارين وفضلتهما يمكن استعمال المقدارين لان نصف
المجتمع مع نصف الفضلة هو الاكبر ونصف المجتمع الا نصف الفضلة هو الاصغر
(انظر الجبر والمقابلة وجه ١٢٤)

القضية التاسعة . ن

اذا كانت نسبة اطول ضلعي مثلث الى اقصرها كنصف القطر الى
ماس زاوية ما تكون نسبة نصف القطر الى ماس فضلة تلك الزاوية
ونصف قائمة كما ماس نصف مجتمع الزاويتين عند قاعدة المثلث الى ماس
نصف فضلتهما

ليكن اب س مثلثا وب س وس ا ضلعين من اضلاعه واب قاعدته وليكن
ب س اطول من س ا . ارسم س د عمودا على
ب س وليعدل س ا . ارسم د ب . فالمثلث
ب س د قائم الزاوية ونسبة ب س : س د ::
ق : م س ب د (ق ا) فالزاوية س ب د
هي الزاوية التي تكون نسبة ماسها الى نصف



القطر كاضلع س د او س ا الى ب س او كنسبة اقصر الضلعين الى اطولها
ولكن ب س + س د : ب س - س د :: م : (س د ب + س ب د) :
م : (س د ب - س ب د) (ق ٥) وايضا ب س + س ا : ب س - س ا :: م :
(س اب + س با) : م : (س اب - س با) فبالمساواة (لان س د = س ا)
م : (س د ب + س ب د) : م : (س د ب - س ب د) :: م : (س اب + س با) :
م : (س اب - س با) ولكن الزاويتان س د ب + س ب د = ٩٠ ° فنسبة م :

(س دب + س ب د) : مم $\frac{1}{3}$ (س دب - س ب د) :: $\frac{ق}{3}$: مم (٤٥° - س ب د)
(ق ٢ فرع ٢)

فنسبة $\frac{ق}{3}$: مم (٤٥° - س ب د) :: مم $\frac{1}{3}$ (س اب + س با) : مم $\frac{1}{3}$
(س اب - س با) وقد تبرهن ان ب س : س ا :: $\frac{ق}{3}$: مم س ب د
فرع. اذا قُرِض ب س وس ا والزاوية عند س فلكي تجد الزاويتين عند ا
وب استعلم زاوية وسماي مثلاً حتى تكون نسبة ب س : س ا :: $\frac{ق}{3}$: مم س ب د
فتكون نسبة $\frac{ق}{3}$: مم (٤٥° - س ب د) :: مم $\frac{1}{3}$ (ا + ب) : مم $\frac{1}{3}$ (ا - ب) فتجد
ا وب حسب السابقة الثانية

القسم الثاني

قواعد حل العمليات

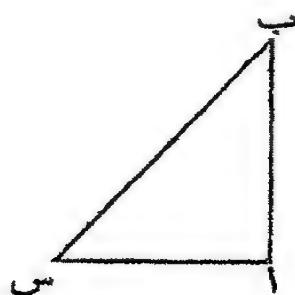
قواعد قياس المثلثات مخنونة في عملية واحدة وهي هذه، في مثلث بسيط ذي
سنة اشياء اي ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا مفروض منها ثلاثة اشياء واحد منها ضلع
مطلوب واحد من الثلاثة الأخر او كلها

العملية الاولى

في مثلث بسيط قائم الزاوية مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع
مطلوب الثلاثة الاخر

في مثلث قائم الزاوية اذا فرضت احده الحادتين تعرف الاخرى لانها كمال
الاولى وجيب احدي الحادتين هو نظير جيب الاخرى وقد جمعت قواعد الحل
حسب اختلاف الاشياء المفروضة في هذا الجدوال. فالعمود الاول منه يدل على
المفروض والثاني على المطلوب والثالث على النسبة التي بها تحل العملية

المفروض	المطلوب	الحل
س ب وب	اس	١ $\frac{ق}{٣} : جب :: س ب : اس$
اي الوتر وزاوية	اب	٢ $\frac{ق}{٣} : نجب :: س ب : اب$
اس وس	ب س	٣ $\frac{ق}{٣} : نجس :: اس : ب س$
اي ضلع واحد الحادتين	اب	٤ $\frac{ق}{٣} : مم س :: اس : اب$
س ب وب ا	س	٥ $\frac{ق}{٣} : س ب : ا :: ق : ج س$
اي الوتر وضلع	اس	٦ $\frac{ق}{٣} : نجس :: س ب : اس$
اس واب	س	٧ $\frac{ق}{٣} : اس : اب :: ق : مم س$
اي الضلعان	س ب	٨ $\frac{ق}{٣} : نجس :: اس : س ب$



تنبيهات، اذا فرض اس وس نجد الوتر ب س بواسطة القاطع ايضا لان
 س ا : س ب :: $\frac{ق}{٣}$: قاطع س فلنا $\frac{ق}{٣}$: قاطع س :: اس : س ب
 واذا فرض ب س واب نجد اس كما في الجدول او بواسطة (ق ٤٧ ك ١) لان
 اس^٢ = ب س^٢ - ب ا^٢ واس^٢ = ب س^٢ - ب ا^٢ وايضا حسب (ق ٥
 ك ٢ فرع) ب س^٢ - ب ا^٢ = (ب س + ب ا) × (ب س - ب ا) فاذا اس =
 (ب س + ب ا) × (ب س - ب ا) وهذه الاخيرة اسهل اذا قصد حل
 العملية بالانساب

إذا فُرض $اس$ و $اب$ يوجد $ب$ $س$ حسب (ق ٤٧ ك ١) لأن
 $ب س = ب ا + ا س$ وإذا قصد حل العملية بالانساب فالاسهل
 ان يطلب اولاً $ماس$ $س$ هكذا $اس : اب :: ق : مم$ $س$ ثم $نج$ $س : ق ::$
 $اس : س : ب$

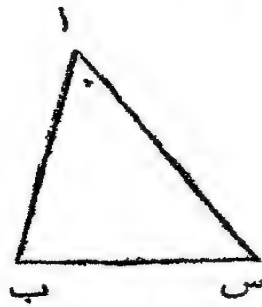
العملية الثانية

في مثلث حادّ الزوايا مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع مطلوب
 الثلاثة الأخر

لهذه العملية ثلاث حالات

الحالة الاولى

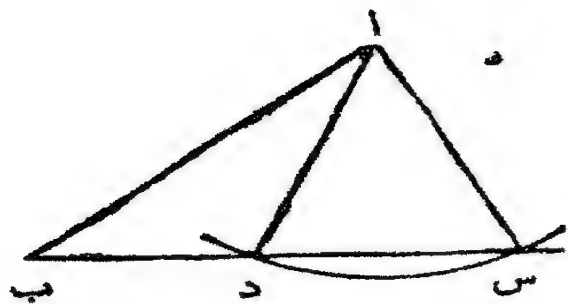
مفروض زاويتان $ا$ و $ب$ والضلع $اب$. مطلوب الضلعان الاخران
 من $ا$ و $ب$ نستعلم $س$ لانها متم $ا + ب$ ولها (ق ٢) $ج س : جا :: اب :$
 $ب س$ و $ج س : ج ب :: اب : اس$



الحالة الثانية

مفروض الضلعان $اب$ و $اس$ والزاوية $ب$ التي تقابل احدهما. مطلوب $ا$ و $س$
 والضلع الاخر $ب س$
 لكي نستعلم $س$ لنا $اس : اب :: ج ب : ج س$ وايضاً $ا = ١٨٠ - ب -$
 $س$ ثم $ج ب : جا :: اس : س$ $ب$ حسب الحالة الاولى
 في هذه الحالة حيث يستعلم جيب $س$ فالجيب المذكور في الجداول قد يكون
 لحادة او لمنفرجة متم الحادة فتكون $س$ حادة او منفرجة لانه اذا كانت $اس$ اقصر

من ا ب يوجد مثلثان لها الضلعان ا ب ا س والزاوية عند ب متساوية ويكونان غير متساويين لان الزاوية التي تقابل ا ب في الواحد هي متم التي تقابلها في الاخر كما يتضح من هذا الشكل



اجعل ا مركزا واس نصف قطر وارسم قوسا يقطع ب س في د وارسم ا د فالامر واضح ان المثلثين ا ب س ا ب د لها الزاوية عند ب والضلع ا ب مشتركان بينهما والضلعان ا س ا د متساويان

ولكن ب د لا يعدل ب س والزاوية ب س لا تعدل ب د ا وب ا د لا تعدل ب ا س لان ا س ب ا د ب كل واحدة منهما متم الاخرى لان ا د س متساوي الساقين واس د = ا د س وبالقاعدة المذكورة سابقا توجد ا س ب او ا د ب ومن هاتين توجد ب ا س وب ا د لان ب ا س متم ا ب س + ا س ب (ق ٢٢ ك ١) فحيثما هو جيب ا ب س + ا س ب. ولكن ب ا د هي فضلة ا س ب واب س لانها فضلة ا د س واب س لان ا د س او ا س د = ا ب س + ب ا د (ق ٢٢ ك ١) فلكي يستعلم ب س بعد استعلام س لنا ج د س : ج د س + ب : ب :: ا ب : ب س وايضا ج د س : ج د س - ب : ب :: ا ب : ب د فاذا كان ا ب اطول من ا س تكون القضية ملتبسة والا فغير ملتبسة

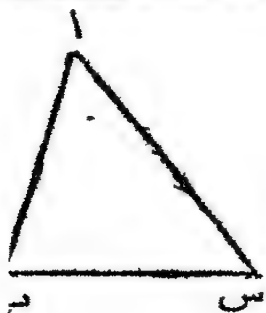
الحالة الثالثة

مفروض ضلعان ا ب واس والزاوية بينهما المطلوب الاخران ب وس والضلع الاخر ب س

اولا ا ب + ا س : ا ب - ا س :: مم $\frac{1}{2}$ (س + ب) : مم $\frac{1}{2}$ (س - ب)
وب = $\frac{1}{2}$ (س + ب) + $\frac{1}{2}$ (س - ب) و س = $\frac{1}{2}$ (س + ب) - $\frac{1}{2}$ (س - ب)
حسب السابقة الثانية

ولكي نجد ب س بعد استعلام ب لنا ج د ب : ج د ا :: ا س : ب س ويستعلم ب س ايضا بدون استعلام ب وس هكذا حسب (ق ٦) ب س =

$$ا ب^2 - ٢ \text{ نجدا } ا ب \times ا س + ا س^2$$



القسم الثالث

القوس ب د وس غ نظير جيب نصف ب د فنظير جيب نصف قوس ما من
 دائرة نصف قطرها واحد هو متناسب متوسط بين $\frac{1}{2}$ و $1 + \text{نحج د}$ فاذا فرض $1 =$
 قوساً ما فنظير جيب $\frac{1}{2}$ هو متناسب متوسط بين $\frac{1}{2}$ و $1 + \text{نحج ا}$ و $(\text{نحج } \frac{1}{2}) =$
 $\frac{1}{2} (1 + \text{نحج ا})$ ونحج $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + \text{نحج ا})$

٢ الامر واضح مما تقدم انه اذا فرض نظير جيب قوس يمكن استعمال نظير جيب نصف تلك القوس. لنفرض القوس ب د = ٦٠° فالوتر ب د = $\frac{ق}{٢}$ فالعمود

ل د في م. ولكن ب ف = ح ل وب ف + د ح = د ح + ح ل = د ل + ل ح =
 ل م + م ل ح = م ح او ك را ي رك = $\frac{1}{3}$ (ب ف + د ح). ولكون
 المثلثين س غ ي رك ي متساويي الزوايا تكون نسبة س ي : ر ي :: س غ : رك
 وقد تبهرن ان ي ر = نجوب س ورك = $\frac{1}{3}$ (ب ف + د ح) فنسبة $\frac{ق}{3}$:
 نجوب س :: ج ا س : $\frac{1}{3}$ (ج ا ب + ج ا د)

فرع. اذا وقعت النقطة ب على النقطة ا لنا $\frac{ق}{ا} = نجب س :: ج$
 ب س : $\frac{ا}{ب} ج ب د$ اي نسبة نصف القطر الى نظير جيب قوس كسبة جيب القوس
 الى نصف جيب مضاعف القوس فاذا فرض قوس $ا = ١$ لنا $\frac{ا}{ب} ج ب ١٢ = ج ا \times$
 نج ا او جيب $١٢ = ٢ ج ا \times$ نج ا و $ج ٢ = ٢ ج ا \times$ نج ا فن جيب ا
 ونظير جيبها يوجد جيب ٢

ثم $\frac{ق}{٢} : نج١ :: نج٢ : \frac{١}{٢} (ج١ + ج٢)$ او $ج١ + ج٢ = ٢ = نج٢$
 $١ + ج٢$ و بطرح $ج١$ من الجابيين تصير $ج٢ = ٢ - نج١ \times ج٢ - ج١$
 $ج٢ = ٤ - ٢ \times نج١ - ج٢$ وهكذا
 $ج٢ = ٥ - ٢ \times نج١ - ج٢$ و

ج ٦ = ٢ نج ١ × ج ٥ - ج ٤ الخ
 وهكذا لاستعلام جيوب الاقواس التي فضلها أكثر من ١. ليكن ١ + ١ + ١
 ٢ ب ثلاثة اقواس فضلها أكثر من ١ فحسب النظرية السابقة $\frac{ق}{٣}$: نج ٢ ::
 ج (١ + ب) : $\frac{١}{٣}$ (ج ١ + ج (١ + ٢ ب)) فاذا كان نصف القطر واحدًا لما ج ١ +
 ج (١ + ٢ ب) = ٢ نج ٢ × ج (١ + ب) او ج (١ + ٢ ب) = ٢ نج ٢ ×
 ج (١ + ب) - ج ١

وعلى هذا الاسلوب يصطنع جدول جيوب ونظير جيوب لاي قوس فَرَض من صفر الى ٩٠°. و جدول المماسات يصطنع بانقسام جيب قوس على نظير جيبه لان $\sin 1^\circ = \frac{1}{100}$ وبعد استعمال المماسات الى حد ٤٥° تستعلم البقية الى حد ٩٠° بقاعدة اخرى اسهل. لان مماس قوس اكبر من ٤٥° يعدل نظير المماس لقوس تحت ٤٥° مثل ما كان الاول فوق ٤٥° اى $\sin 50^\circ = \text{نظير مماس } 40^\circ$ ونصف

القطر متناسب متوسط بين المماس ونظير المماس. فاذا فرضت قوس ما
 $\text{و } ٤٥^\circ = \text{د لنا م } (٤٥^\circ - \text{د}) : ١ :: ١ : \text{م } (٤٥^\circ + \text{د}) \text{ وم } (٤٥^\circ + \text{د}) =$

$$\frac{١}{\text{م } (٤٥^\circ - \text{د})}$$

القطّاع تستعلم حسب (حد ٩ فرع ٢) حيث يبرهن أن نصف القطر متناسب
 متوسط بين نظير جيب قوس وقاطعه اي قاطع $\frac{١}{\text{م } (٤٥^\circ - \text{د})} = \frac{١}{\text{م } (٤٥^\circ + \text{د})}$
 سهم الجيب يوجد بطرح نظير الجيب من نصف القطر
 يستنتج من النظرية السابقة بعض العبارات السهلة الاستعمال في حل
 العمليات

اولاً. اذا فرض القوس $\text{ا} = \text{ا} \text{ و } \text{ب} = \text{ب} \text{ ونصف القطر } \text{س} = \text{ر}$
 فحينئذ $\text{ا} + \text{ب} = \text{ا} + \text{ب} \text{ و } \text{ا} - \text{ب} = \text{ا} - \text{ب} \text{ ولنا ما تقدم برهانه}$
 $\text{ا} : \text{نجوب} :: \text{ج} : \text{ا} + \text{ب} :: \text{ا} - \text{ب} : \text{ج}$
 $\text{ج} \times \text{نجوب} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} - \text{ب}$

ثانياً. لأن $\text{ب} \text{ ف } \text{ر} \text{ ك} \text{ دح متوازية والخطان } \text{ب} \text{ د } \text{ ف } \text{ح} \text{ قُطِعا متناسبا}$
 فالخط $\text{ف} \text{ ح} \text{ الذي هو فضلا } \text{ف} \text{ ي } \text{ ح} \text{ ي قد تنصف في } \text{ك} \text{ وكما نبرهن في النظرية}$
 $\text{ك} \text{ ي هو نصف مجتمعة } \text{ف} \text{ ي } \text{ و } \text{ح} \text{ ي اي نظير الجيبين للقوسين } \text{ا} \text{ ب} \text{ و } \text{ا} \text{ د} \text{ وبمشابهة}$
 المثلثين $\text{ي} \text{ غ} \text{ س} \text{ ي} \text{ ك} \text{ ر} \text{ نسبة } \text{ي} \text{ س} : \text{ي} \text{ ر} :: \text{غ} \text{ ي} : \text{ك} \text{ ي} \text{ هو نظير جيب}$
 $\text{ا} \text{ س} \text{ فاذا } \frac{\text{ق}}{\text{ا}} : \text{نجوب} :: \text{س} : \text{ا} + \text{ب} :: \text{ا} - \text{ب} : \text{ق}$
 $\text{ا} : \text{نجوب} :: \text{نج} : \text{ا} + \text{ب} :: \text{ا} - \text{ب} : \text{نج}$
 $\text{نج} \times \text{نجوب} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ا} - \text{ب}$

ثالثاً. المثلثان $\text{ر} \text{ د} \text{ م} \text{ س} \text{ ي} \text{ غ}$ متشابهان. لأن $\text{ك} \text{ ر} \text{ م} \text{ قائمة وي} \text{ ر} \text{ د} \text{ قائمة فاذا}$
 طُرِحَت الزاوية $\text{ي} \text{ ر} \text{ م}$ فالزاوية $\text{د} \text{ ر} \text{ م} = \text{ي} \text{ ر} \text{ ك} \text{ او } \text{ي} \text{ س} \text{ غ} \text{ والزاويتان } \text{د} \text{ م} \text{ ر}$
 $\text{س} \text{ غ} \text{ ي} \text{ متساويتان لانها قائمتان ففي المثلثين } \text{ر} \text{ د} \text{ م} \text{ س} \text{ غ} \text{ ي} \text{ الاضلاع التي تلي}$
 الزوايا المتساوية هي متناسبة $\text{وي} \text{ س} : \text{س} \text{ غ} :: \text{د} \text{ ر} : \text{ر} \text{ م}$ هو نصف فضلا
 نظير الجيبين $\text{ف} \text{ ي} \text{ ح} \text{ فلنا}$

$$\frac{\text{ق}}{\text{ا}} : \text{ج} : \text{ا} \text{ س} :: \text{ج} : \text{ب} : \text{س} : \frac{\text{ا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \text{ او}$$

١ : جا :: جب : ٠ نج (١-ب) - ١ نج (١+ب) وايضا

جا × جب = ١ نج (١-ب) - ١ نج (١+ب)

رابعا. في المثلثين ي س غ درم نسبة ي س : ي غ :: رد : دم ودم هو

نصف فضلة الجيبين دح وب ي فاذا

ق : نج اس :: جب س : ١ جا د - ١ جا ب او

١ : نج ا :: جب : ١ جا (١+ب) - ١ جا (١-ب) فاذا

نج ا × جب = ١ جا (١+ب) - ١ جا (١-ب)

خامسا. اذا كان ا وب قوسين وكان نصف القطر واحدا فلنا

(١) جا × نج ب = ١ جا (١+ب) + ١ جا (١-ب)

(٢) نج ا × نج ب = ١ نج (١+ب) + ١ نج (١-ب)

(٣) جا × جب = ١ نج (١+ب) - ١ نج (١-ب)

(٤) نج ا × جب = ١ جا (١+ب) - ١ جا (١-ب)

ومن هذه الاربعة يُستخرج اربع آخر

بجمع الاولى والرابعة جا × نج ب + نج ا × جب = جا (١+ب)

بطرح الرابعة من الاولى جا × نج ب - نج ا × جب = جا (١-ب)

بجمع الثانية والثالثة نج ا × نج ب + جا × جب = نج (١+ب)

بطرح الثالثة من الثانية نج ا × نج ب - جا × جب = نج (١-ب)

سادسا. اذا فرض ا + ب = ص و ا - ب = د فحسب الاولى من العبارات

السابقة وحسب السابقة الثانية $\frac{ص+د}{٢} = ا$ و $\frac{ص-د}{٢} = ب$

فجيب $\frac{ص+د}{٢} > نج$ $\frac{ص-د}{٢} = نج$ $\frac{١}{٢} ج ص + \frac{١}{٢} ج د$ ولكن ص ود

دا الآن على اي قوسين كانا فيمكن ان يسميا ا وب كما في العبارات السابقة. فلنا

جا $\frac{١+ب}{٢} \times نج \frac{١-ب}{٢} = \frac{١}{٢} جا + \frac{١}{٢} جب$

او $٢ جا \frac{١+ب}{٢} \times نج \frac{١-ب}{٢} = جا + جب$ ومن العبارة الثانية

السابقة لنا $٢ نج \frac{١+ب}{٢} \times نج \frac{١-ب}{٢} = نج ب + نج ا$ ومن الثالثة لنا

$$٢ \text{ ج } \frac{ا+ب}{٣} \times \text{ ج } \frac{ا-ب}{٣} = \text{ نج } ب - \text{ نج } ا \text{ ومن الرابعة لنا}$$

$$٣ \text{ نج } \frac{ا+ب}{٣} \times \text{ ج } \frac{ا-ب}{٣} = \text{ ج } ا - \text{ ج } ب$$

وفي هذه العبارات حُسِبَ القوس ب اقصر من القوس ا
سابعاً. وعلى هذا الاسلوب نستخرج عبارات دالة على مماسات اقواس لان
مماس قوس يعدل الجيب مقسوماً على نظير الجيب

$$\text{م } (ا+ب) = \frac{\text{ج } (ا+ب)}{\text{نج } (ا+ب)} \text{ وقد تبرهن ان}$$

$$\text{ج } (ا+ب) = \text{ ج } ا \times \text{ نج } ب + \text{ نج } ا \times \text{ ج } ب \text{ وايضاً ان}$$

$$\text{نج } (ا+ب) = \text{ نج } ا \times \text{ نج } ب - \text{ ج } ا \times \text{ ج } ب \text{ فاذا}$$

$$\text{م } (ا+ب) = \frac{\text{ج } ا \times \text{ نج } ب + \text{ نج } ا \times \text{ ج } ب}{\text{نج } ا \times \text{ نج } ب - \text{ ج } ا \times \text{ ج } ب} \text{ ثم بقسمة الصورة}$$

والمخرج على نج ا \times نج ب لنا

$$\text{م } (ا+ب) = \frac{\text{ج } ا + \text{ م } ب}{\text{ج } ا \times \text{ م } ب + ١}$$

$$\text{وهكذا } \text{م } (ا-ب) = \frac{\text{ج } ا - \text{ م } ب}{\text{ج } ا \times \text{ م } ب + ١}$$

(٨) اذا تحولت الثالثة من العبارات السابقة (٦) على هذا المنوال فلنا

$$\frac{\text{ج } ا + \text{ ج } ب}{\text{ج } ا - \text{ ج } ب} = \frac{\frac{١}{٣} (ا+ب)}{\frac{١}{٣} (ا-ب)} \text{ وحسب (ق ٢ فرع ١)}$$

$$\frac{\text{نج } ا + \text{ نج } ب}{\text{نج } ا - \text{ نج } ب} = \frac{\frac{١}{٣} (ا+ب)}{\frac{١}{٣} (ا-ب)} \text{ وبالفرع الثاني}$$

$$\frac{\text{ج } ا + \text{ ج } ب}{\text{ج } ا - \text{ ج } ب} = \frac{\frac{١}{٣} (ا+ب)}{\frac{١}{٣} (ا-ب)} \text{ اولاً } \frac{١}{٣} = ١$$

$$\frac{\text{ج } ا + \text{ ج } ب}{\text{ج } ا - \text{ ج } ب} = \frac{١}{٣} \text{ م } (ا+ب)$$

تنبيه. اذا تحولت هذه المعادلات الى نسب فلا بد من اعادة
الواحد اي $\frac{١}{٣}$ الذي قد ترك للاختصار لكونه واحداً فلا يعتد به عند
الضرب ولكن يعتبر في النسب

اصول قياس المثلثات الكروية

القضية الاولى

اذا قُطِعَتْ كُرَّةٌ بِسَطْحٍ مَارٍ بِمَرْكَزِهَا فَالْقَطْعُ دَائِرَةٌ مَرْكَزُهَا مَرْكَزُ الْكُرَّةِ
وهي تعدل الدائرة التي بدورانها رُسِمَتِ الْكُرَّةُ

لأن كل الخطوط المستقيمة المرسومة من مركز الكرة الى سطحها تعدل نصف
قطر نصف الدائرة المَحْدَثَةِ الْكُرَّةَ (حد ٧ ك ٣ مضافات) فموضع نقاط سطح سيط
وسطح الكرة خط في سطح واحد وكل نقطة منه على بعد واحد من مركز الكرة فهي
محيط دائرة (حد ١١ ك ١) مركزها مركز الكرة ونصف قطرها نصف قطر الكرة او
نصف قطر نصف الدائرة التي بدورانها أُحْدِثَتِ الْكُرَّةُ فتعدل الدائرة التي كان
نصف الدائرة المحدثه نصفها

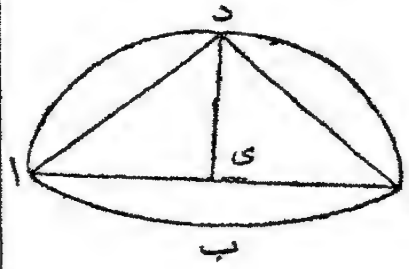
حدود

- ١ كل دائرة حادثة من قطع كرة بسطح سيط مار بمركزها تسمى دائرة عظيمة
فرع كل الدوائر العظيمة لكرة واحدة متساوية وتنصف بعضها بعضها لأن
انصاف اقطارها متساوية كما تقدم برهانها وخط نقاطها قطر لكل واحدة منها
- ٢ قطب دائرة عظيمة هو نقطة في سطح الكرة وجميع الخطوط المستقيمة المرسومة
منها الى محيط الدائرة متساوية
- ٣ الزاوية الكروية هي زاوية على سطح كرة واقعة بين قوسين من دائرتين
عظيمتين نقطاطعان وهي تعدل ميل سطحي هاتين الدائرتين احدها على الاخر
- ٤ المثلث الكروي هو شكل على سطح كرة واقع بين ثلاثة اقواس من ثلاث
دوائر عظيمة كل واحد منها اقل من نصف دائرة

القضية الثانية

قوس دائرة عظيمة واقع بين قطب دائرة اخرى عظيمة ومحيطها هو ربع دائرة

لكن اب س دائرة عظيمة ود قطبها فاذا مرّ س د قوس دائرة عظيمة في د ولاقي اب س في س فالقوس د س ربع دائرة
الدائرة التي س د قوس منها لتلاقي اب س
ايضا في ا وليكن اس موضع تقاطع هاتين
الدائرتين العظيمتين فهو يمر في ي مركز الكرة.
ارسم دا د س. الخط ا د = د س (حد ٢)



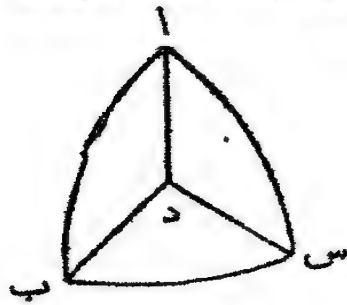
فالقوس ا د = القوس د س (ق ٢٨ ك ٢) واد س نصف دائرة فكل واحدة من القوسين ا د و د س ربع دائرة

فرع اول. اذا رسم د ي فالزاوية د ي ا قائمة ود ي عمودي على كل خط يلاقيه في سطح الدائرة اب س فهو عمود على ذلك السطح (ق ٤ ك ٢ مضافات)
فالخط المستقيم المرسوم من قطب دائرة عظيمة الى مركز الكرة هو عمود على سطح تلك الدائرة. وبالقرب كل خط من مركز الكرة عمودا على سطح دائرة عظيمة يلاقى سطح الكرة في قطب تلك الدائرة

فرع ثان. الدائرة اب س لها قطبان واحد على الجانب الواحد والاخر على الجانب الاخر من سطحها وهما نهايتا قطر الكرة العمودي على سطح اب س. ولا يمكن ان تكون نقطتان اخريان قطبي الدائرة اب س

القضية الثالثة

اذا كان قطب دائرة عظيمة في نقطة تقاطع دائرتين اخريين عظيمتين فالقوس من الدائرة الاولى الواقع بين الاخرين هو قياس الزاوية الكروية الحادثة بينهما راسها عند القطب الذي هو نقطة التقاطع
ليكن د مركز كرة وب ا س دائرتين عظيمتين تتقاطعان في ا وليكن ب س



قوس دائرة اخرى عظيمة قطبها ا. فالقوس ب س هو قياس الزاوية الكروية ب ا س

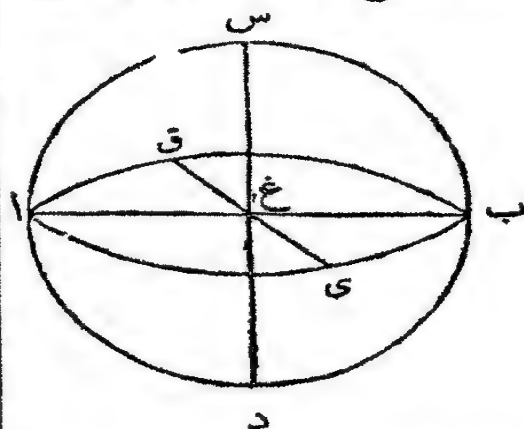
ارسم ا د ب د س. لان ا قطب ب س فالقوس ا ب ربع دائرة و ا س كذلك (ق ٢) و ا د ب ا د س قائمتان. فالزاوية س د ب هي ميل سطح دائرة القوس

ا ب على دائرة القوس ا س (حد ٢) و (حد ٤ ك ٢ م) وتعديل الزاوية الكروية ب ا س والقوس ب س نقيس الزاوية ب د س فهو يقيس الزاوية الكروية ب ا س ايضا فرع. اذا كان كل واحد من القوسين ا ب ا س المتقاطعتين في اربع دائرة تكون ا قطب الدائرة العظيمة المارة في ب وس نهايتي القوسين. لان ا ب و ا س رُبعاً دائرة فالزاويتان ا د ب ا د س قائمتان فالخط ا د عمود على السطح ب د س اي على سطح الدائرة العظيمة المارة في ب وس فالنقطة ا في قطب الدائرة العظيمة المارة في ب وس (ق ١ فرع ٢)

القضية الرابعة

اذا كان سطح دائرة عظيمة عمودياً على سطح دائرة اخرى عظيمة فمحيط كل واحدة منهما يمرّ بقطبي الاخرى. وبالقلب اذا مرّ محيط دائرة عظيمة في قطبي دائرة اخرى عظيمة فسطح الواحدة عمودي على سطح الاخرى

لتكن ا س ب د اى ب ق دائرتين عظمتين سطح الواحدة عمودي على



سطح الاخرى فقطبها ا س ب د هما في محيط اى ب ق فقطبها اى ب ق في محيط ا س ب د

من غ مركز الكرة ارسم الخط ع س في سطح ا س ب د عموداً على ا ب. فلان غ س في سطح ا س ب د العمودي على اى ب ق ولانه عمود على موضع تقاطع السطحين فهو عمود

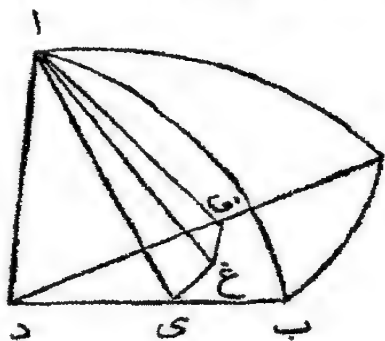
على سطح اى ب ق (حد ٢ ك ٢ م) فالنقطة س هي قطب الدائرة اى ب ق (ق ٢)
 فرع اول، واذا أخرج س غ الى تكون د قطب اى ب ق الآخر
 وهكذا اذا رسم ع ي في سطح اى ب ق عموداً على اب وأخرج الى ق يبرهن
 ان ي وق قطبا الدائرة اس ب د وبالقلب اذا كانت س قطباً للدائرة اى ب ق
 فالدائرة العظيمة المارة في س هي عمودية على اى ب ق. لانه اذا رسم س غ من
 القطب الى مركز الدائرة اى ب ق يكون عموداً على سطحها (ق ٢ فرع اول) فكل
 سطح ماز في س غ (ق ١٧ ك ٢ م) هو عمودي على سطح اى ب ق و سطح اس ب د
 هو ماز في س غ فهو عمود على اى ب ق

فرع اول. في دائرتين عظيمتين اذا مرّت اولاهما في قطبي الثانية فالثانية
 تمرّ بقطبي الاولى
 فرع ثان. كل الدوائر العظيمة التي لها قطر مشترك تكون اقطابها في دائرة
 عظيمة سطحها عمودي على ذلك القطر

القضية الخامسة

في مثلث كروي متساوي الساقين تكون الزاويتان عند القاعدة
 متساويتين

ليكن اب س مثلثاً كروياً. والضلع اب منه فليعدل الضلع اس منه فالزاوية
 الكروية اب س تعدل الكروية اس ب



ليكن د مركز الكرة. ارسم دب دس دا.
 ومن ا رسم اق عموداً على دس واى عموداً على س
 دب وفي السطح دب س ارسم ق ع عموداً على
 دس وى غ عموداً على دب وليلتقي في غ. ارسم اغ
 لان دى عمود على اى وى غ فهو عمود

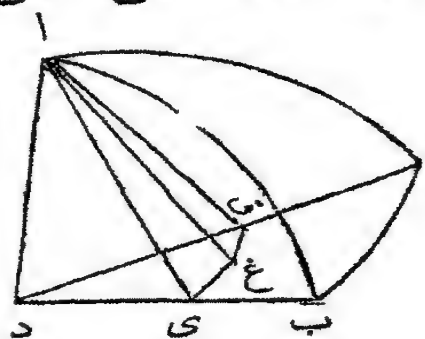
على السطح الماز بهما (ق ٤ ك ٢ م) فكل سطح ماز في دى هو عمودي على سطح اى غ
 (ق ١٧ ك ٢ م) فالسطح دب س عمودي على سطح اى غ. ولهذا السبب هو عمودي
 على سطح اق غ ايضاً فالخط اغ الذي هو موضع تقاطع السطحين اق غ اى ع هو

عموداً على سطح دب س (ق ١٨ ك ٢ م) والزائتان اغ ي اغ ق قائمتان
ولكن القوس اب يعدل القوس اس فالزاوية ادب = ادس. فالمثلثان
ادى ادق لها الزاويتان ادق ادى متساويتان وايضاً اى د اق دلانها
قائمتان والصلع اد مشترك بينهما فالصلع راي يعدل الصلع اق (ق ٢٦ ك ١)
ودى = دق ولان اغ ي اغ ق قائمتان فالمرتعان على اغ وغ ي يعدلان المربع
على اى وكذلك اغ^٢ + غ ق^٢ = اق^٢ واى^٢ = اق^٢ فاذاً اغ^٢ + غ ي^٢ = اق^٢ + غ ق^٢
وغ ي^٢ = غ ق^٢ وغ ي = غ ق فالزاوية اق غ = اى غ (ق ٨ ك ١) واق غ هي
الحادثة بين سطح ادس و سطح دب س (حد ٤ ك ٢ م) لان اق وق غ عمودان
على دس موضع تقاطع السطحين فالزاوية اق غ = الزاوية الكروية اس ب (حد ٣)
ولهذا السبب ايضاً اى غ = الزاوية الكروية اب س واى غ = اق غ فاذاً اب س
= اس ب

القضية السادسة

في مثلث كروي اذا كانت الزاويتان عند القاعدة متساويتين فالمثلث
متساوي الساقين

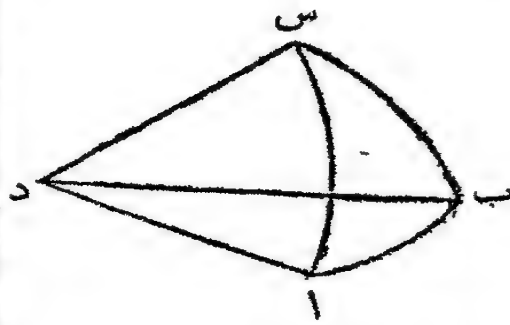
يبرهن كما في القضية السابقة ان اع ق اغ ي قائمتان وان اق ع اى غ
تعدلان الحادتين بين السطحين داس داب
والسطح دب س وان اق ع = اى غ وان
اق = اى ثم دق^٢ + ق ا^٢ = د ا^٢ ودى^٢ + اى^٢ = ا^٢ س
د ا^٢ واق^٢ = اى^٢ فاذاً دق^٢ = دى^٢ ودق = دى
دى فالزاوية داق = د اى فالقوس اب
القوس اس



القضية السابعة

كل ضلعين من مثلث كروي هما معاً اطول من ضلعه الثالث

ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً فكل ضلعين منه $اب$ و $ب س$ هما معاً أطول من الضلع الثالث $ا س$



ليكن $د$ مركز الكرة. ارسم $د س$ و $د ب$
 ١. فالزاوية المحيطة عند $د$ يحيط بها المثلث
 زوايا البسيطة $ا د ب$ و $ا د س$ و $ب د س$ وكل
 اثنتين منها معاً $ا د ب$ و $ب د س$ أكبر من
 الثالثة $ا د س$ (ق ٢٠ ك ٢ م) فكل اثنتين

من الاقواس $ا ب$ و $ا س$ و $ب س$ التي نقيس هذه الزوايا هما معاً أطول من الثالث

القضية الثامنة

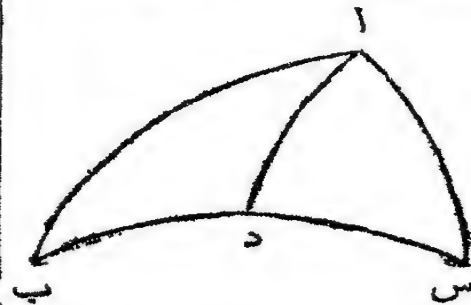
اضلاع مثلث كروي الثلاثة هي معاً أقل من محيط دائرة عظيمة

في رسم القضية السابقة ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً فاضلاعة الثلاثة $ا ب$ و $ا س$ و $ب س$ هي معاً أقل من محيط دائرة عظيمة

ليكن $د$ مركز الكرة فالزوايا البسيطة التي تحيط بالزاوية المحيطة عند $د$ هي معاً أقل من اربع زوايا قائمة (ق ٢١ ك ٢ م) فالاقواس التي نقيسها هي معاً أقل من اربعة ارباع دائرة أو أقل من محيط الدائرة التي مركزها $د$ ونصف قطرها $ا د$

القضية التاسعة

في مثلث كروي الزاوية الكبرى تقابل الضلع الأطول وبالعكس



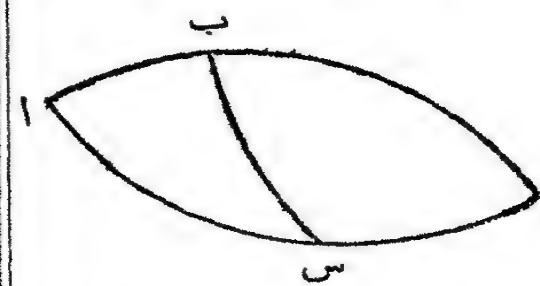
ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً فالزاوية الكبرى
 ١ تقابل الضلع الأطول $ب س$. اجعل الزاوية
 $ب ا د$ تعدل الزاوية عند $ب$ فالضلع $ب د = ا د$
 (ق ٦) و $ا د + د س = ب س$ ولكن $ا د + د س < ب س$
 (ق ٧) فإذا $ب س < ا س$

وب $س$ يقيس الزاوية عند $ا$. وإما قلب هذه القضية فقد سبق برهانه في ق ١٩ ك ١

القضية العاشرة

إذا كان مجتمع ضلعي مثلث كروي أكثر من نصف دائرة تكون كل واحدة من الزاويتين الداخليتين عند القاعدة أكبر من الخارجة المقابلة عند القاعدة. وإذا عدل مجتمعها نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين تعدل الخارجة. وإذا كان مجتمعها أقل من نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين أصغر من الخارجة. وإيضاً مجتمع الداخليتين عند القاعدة أكبر من قائمتين أو يعدل قائمتين أو أصغر من قائمتين حسبما كان مجتمع الضلعين أكثر من نصف دائرة أو يعدله أو أصغر منه.

ليكن ab s مثلثاً كروياً ضلعاؤه ab و b s وقاعدته a s . أخرج احد



الضلعين ab والقاعدة a s حتى يلتقيا

إيضاً في d . فالقوس ab d نصف دائرة

والزاوية الكروية عند a تعدل الكروية

عند d لأن كل واحدة منهما هي ميل

الدائرة ab d على الدائرة a s d

(١) إذا كان $ab + b$ s = نصف دائرة أو d فينشئ b s = b d

والزاوية عند d (ق ٥) أو عند a = b s d أي الداخلة عند القاعدة تعدل الخارجة

المقابلة

(٢) إذا كان $ab + b$ s أكبر من نصف دائرة أو من ab d فينشئ b s

أكبر من b d والزاوية عند d أو أكبر من b s d (ق ٩)

(٣) وهكذا إذا كان $ab + b$ s أقل من نصف دائرة أو من ab d تكون

d أو أصغر من b s d . ثم b s d b s a تعدلان قائمتين. فإذا كانت a

أكبر من b s d يكون $a + s$ b أكبر من قائمتين. وإذا كان a = b s d

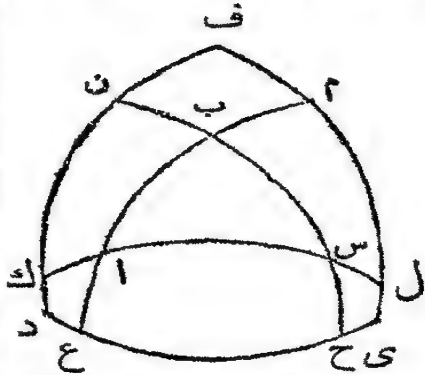
يكون $a + s$ b = قائمتين وإذا كان a أصغر من b s d يكون $a + s$ b

أقل من قائمتين

القضية الحادية عشرة

اذا جعلت زوايا مثلث كروي اقطاب ثلاث دوائر عظيمة فهذه الدوائر
الثلاث بتقاطعها تحدث مثلثا يسمى متم الاول. واضلاع احدها
متمات للاقواس التي تقيس زوايا الآخر

ليكن ا ب س مثلثا كرويا وليكن ا و ب وس اقطابا للدوائر العظام ف ي
ي د د ف التي تتقاطع في ف و ي ود. فاضلاع
المثلث ف ي د هي متمات لقيسة الزوايا ا و ب
وس اي ف ي متم ب ا س و د ي متم ا ب س
و د ف متم ا س ب. وايضا ا س متم الزاوية د ف ي
و ا ب متم الزاوية ف ي د و ب س متم الزاوية
ي د ف. اخرج ب س الى ن و ح و ا ب الى م
و غ و ا س الى ك و ل



لأن اقطب ف ي والدائرة ا س تمر في ا ف والدائرة ف ي تمر بقطب ا س
(ق ٤ فرع ١) ولأن س قطب ف د ف والدائرة ف د تمر بقطب ا س ف قطب ا س
هو ف عند تقاطع القوسين ي ف د ف. وهكذا يبرهن ان د قطب ب س و ي
قطب ا ب

ولان ف قطب ا ل و ي قطب ا م فالقوس ف ل ربع دائرة و ي م كذلك
(ق ٢) و ف ل م ي معا و ف ي م ل معا يعدلان نصف دائرة و م ل قياس
ب ا س (ق ٢) فاذا ف ي متم قياس ب ا س وهكذا في البقية
ولأن س ن ربع دائرة و ب ح ربع دائرة فالقوسان س ب ب ح معا و ن ح
ب س معا يعدلان نصف دائرة و ن ح قياس ف د ي فقياس ف د ي متم ب س
وهكذا في البقية

القضية الثانية عشرة

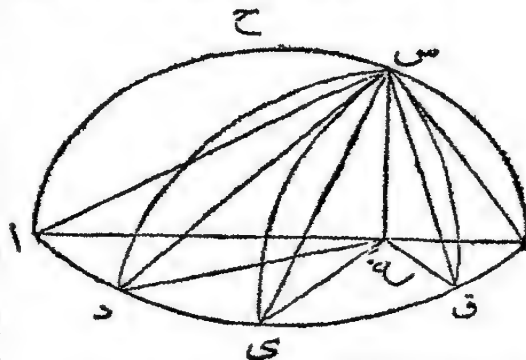
الزوايا الثلاث من مثلث كروي هي معاً أكبر من قائمتين واصغر من ست زوايا قائمة

في رسم القضية السابقة اقيسة الزوايا الثلاث ا ب س في المثلث ا ب س مع اضلاع المثلث المتم دى ف تعدل ثلاثة انصاف دائرة (ق ١١) ولكن اضلاع ف دى الثلاثة معاً اقل من نصف دائرة (ق ٨) فاقيسة ا وب وس أكبر من نصف دائرة فالزوايا الثلاث ا وب وس أكبر من قائمتين ولأن الزوايا الداخلة من كل مثلث مع الخارجة تعدل ست زوايا قائمة فالداخلة وحدها اقل من ست زوايا قائمة

القضية الثالثة عشرة

اذا رُسِمَتْ اقواس دوائر عظيمة على محيط دائرة عظيمة من نقطة في محيط الكرة ليست هي قطب تلك الدائرة فاطول هذه الاقواس هو المارّ بقطب تلك الدائرة ومتمّه هو الاقصر ومن البقية فالاقرب الى الاطول اطول من الابعد منه

ليكن ا د ب محيط دائرة عظيمة قطبها ح وتكن س نقطة اخرى ومن س ليُرسم اقواس على ا د ب فالاطول هو س ح ا المارّ بالقطب والاقصر هو س ب متم س ح ا ومن البقية فالاقرب الى س ح ا اي س د هو اطول من س ي الابعد منه . من س ا رسم س غ عموداً على ا ب فهو عمود على سطح ا د ب . ا رسم د غ ي غ ق ب س ا س د س ي س ق س ب لان ا ب قطر الدائرة ا د ب و غ نقطة



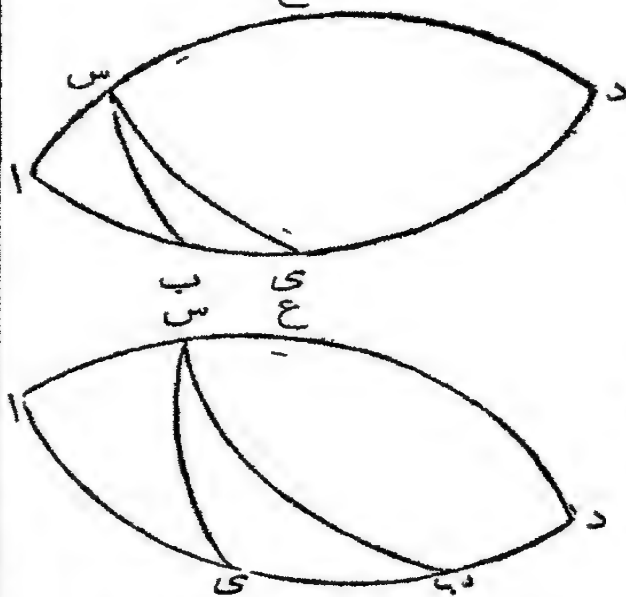
715

فيه غير المركز فالقسم اغ الذي فيه المركز هو اطول المخطوط (ق ٧ ك ٣) التي
ترسم من غ الى المحيط وغ ب اقصرها وغ د الاقرب الى اغ اطول من غ ي الذي
هو ابعد. ولكن المثلثات س غ ا س غ د لها قاعدة عند غ و $اس = اغ + غس$
و $دس = دغ + غس$ ولكن $اغ > دغ$ و $اس < دس$ لان $اغ < دغ$ فاذا
 $اس < دس$ و $اس < دس$ ولكون الوتر اس اطول من الوتر دس فالقوس
اس اطول من القوس دس. وهكذا في البقية

القضية الرابعة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية الضلعان المحيطان بالقائمة والزاويتان
المقابلتان لهما من جنس واحد. اي اذا كان الضلع اكبر من ربع دائرة
تكون الزاوية المقابلة اكبر من قائمة واذا كان اقل من ربع تكون
الزاوية المقابلة اصغر من قائمة

ليكن ab س مثلثا كرويا لة قائمة عند a فالضلع ab جنسه كجنس الزاوية المقابلة as ب



فلكون γ قطب الدائرة α δ يكون γ δ ربع دائرة (ق ٢) و سطح γ δ عمودي على سطح الدائرة α δ (ق ٤) فالزاوية الكروية α δ γ قائمة فاذا كان

ا ب اقصر من اى تكون ا س ب اصغر من قائمة واذا كان ا ب اطول من اى
تكون ا س ب اكبر من ا س ي واكبر من قائمة وهكذا يبرهن قلب هذه القضية

القضية الخامسة عشرة

في مثلث كروي ذي قائمة اذا كان الضلعان المحيطان بالقائمة من
جنس واحد يكون الوتر اقل من ربع دائرة واذا كانا مختلفي الجنس
يكون الوتر اكثر من ربع دائرة

في رسم القضية السابقة نصِّف ا د في غ فيكون غ قوس 90° وغ قطب
ا ب د

(١) ليكن ا ب ا س اقل من 90° فليكون س نقطة في سطح الكرة غير قطب
ا ب د تكون القوس س غ د المارة بالقطب غ اطول من س ي وس ي اطول من
س ب (ق ١٢) وس ي ربع دائرة فيكون س ب اقل من ربع دائرة. وهكذا
يبرهن في المثلث س د ب ذي القائمة عند د الذي ضلعا س د و د ب اكبر من
ربع دائرة فالوتر س ب اقل من ربع دائرة

(٢) ليكن ا س اقل من 90° و ا ب اكبر من 90° فلان س ب واقع بين
س غ د وس ي فهو اطول من س ي (ق ١٢) اي اطول من ربع دائرة
فرغ اول. وبالقلب في مثلث كروي قائم الزاوية اذا كان الوتر اكثر من ربع
دائرة يكون الضلعان مختلفي الجنس والا فمن جنس واحد

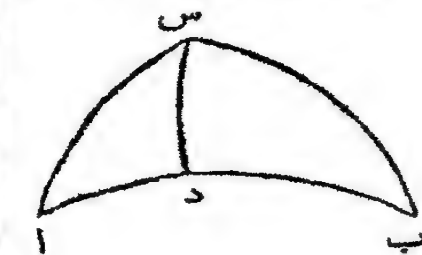
فرغ ثان. في مثلث كروي قائم الزاوية الزاويتان الاخريان من جنس الضلعين
المقابلين لها فاذا كان الوتر اكبر من نصف دائرة فالزاويتان الاخريان مختلفتا
الجنس والا فمن جنس واحد

فرغ ثالث. الضلعان من جنس الزاويتين المقابلتين فاذا كانت زاوية والضلع
الذي يليها من جنس واحد فالوتر اقل من نصف دائرة وبالقلب

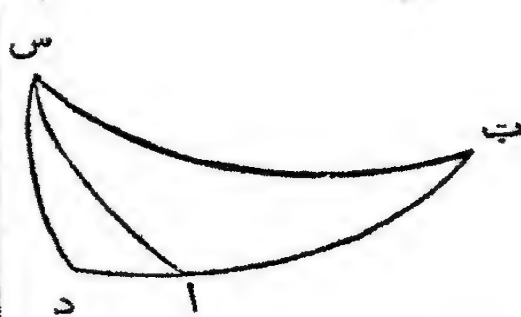
القضية السادسة عشرة

في مثلث كروي إذا رُسم عمود على القاعدة من الزاوية المقابلة ووقع العمود داخل المثلث فالزاويتان عند القاعدة من جنس واحد وإذا وقع خارج المثلث فهما مختلفتا الجنس

ليكن $ا ب س$ مثلثاً كروياً وليرسم القوس $س د$ من $س$ عموداً على القاعدة $ا ب$ (١) ليقع $س د$ داخل المثلث. فالزاويتان $ا د س$ $ب د س$ قائمتان فالزاويتان عند $ا$ و $ب$ هما من جنس $س د$ (ق ١٤)



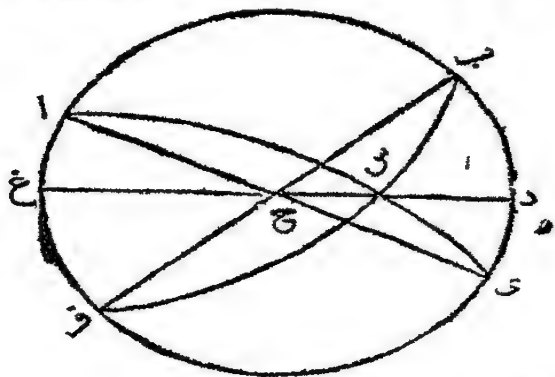
(٢) ليقع $س د$ خارج المثلث فالزاوية عند $ب$ هي من جنس $س د$ (ق ١٤) و $س ا د$ من جنس $س د$ فالزاويتان $ب$ و $س ا د$ من جنس واحد وب $س ا ب$ مختلفتا الجنس فرغ. إذا كان $ا ب$ من جنس واحد يقع العمود داخل المثلث وإلا فخارجه



القضية السابعة عشرة

إذا رُسم عمود على قاعدة مثلث كروي من الزاوية المقابلة ووقع داخل المثلث أو كان أقرب الاثنين الواقعين خارجه فاصغر قسيمي القاعدة يلي اقصر ضلعي المثلث إذا كان مجتمع الضلعين اقل من نصف دائرة ويلى اطول الضلعين إذا كان مجتمعهما أكثر من نصف دائرة

ليكن $ا ب ي$ ف دائرة عظيمة من كرة وح قطبها و غ ح د دائرة مارة ب ف ح



وعمودية على ا ب ي ف . ولتكن ي وب
نقطتين في الدائرة ا ب ي ف على جانبي
د ولتكن د اقرب الى ي . ولتكن س نقطة
في الدائرة غ ح د بين ح ود . ارسم القوسين
ي س ا ب س غ فكل واحدة منها
نصف دائرة وى س ب ي س ف

ف س ا س ب اربع مثلثات كروية بين اقواس دائرتين ولها العمودات س د
وس غ

(١) لان س ا اقرب من س ب الى القوس س ح غ فالقوس س ا اطول من
القوس س ب وس ا + س ي < س ب + س ي فيكون س ب + س ي اقل
من نصف دائرة وى د بالمفروض اقصر من د ب فيكون ي س اقصر من س ب
(ق ١٣) فاذا وقع العمود داخل المثلث وكان مجموع الضلعين اقل من نصف دائرة
فالقسم الاقصر من القاعدة يلي الضلع الاقصر

(٢) في المثلث ف س ي الضلعان ف س س ي اقل من نصف دائرة
وى س اقصر من س ف لانه ابعد عن س ح غ . فاذا وقع العمود خارج المثلث
وكان مجموع الضلعين اقل من نصف دائرة فالقسم الاقصر يلي الضلع الاقصر

(٣) ولكن في المثلث ف س ا الضلعان ف س س ا اطول من نصف دائرة
واس اطول من س ف لان ي س اقصر من س ب فيكون ا س اقرب الى
س ح غ فيكون ا غ اقصر قسمي القاعدة وهو يلي الضلع الاطول

(٤) وفي المثلث ا س ب ا س وس ب معاً اطول من نصف دائرة واس
اطول من ب س فاقصر قسمي القاعدة ا غ يلي الضلع الاطول

القضية الثامنة عشرة

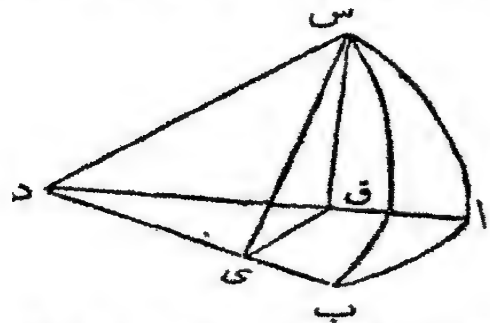
في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة جيب احد الضلعين المحيطين
بالقائمة الى نصف قطر الكرة كنسبة جاس الضلع الآخر الى جاس
الزاوية التي تقابله

ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً ذا قائمة عند $ا$ فنسبة جيب الوتر $ب س$ الى نصف

القطر كنسبة جيب القوس $اس$ الى جيب الزاوية $اب س$

ليكن $د$ مركز الكرة وليرسم $س ي$ عموداً

على $د ب$ فهو جيب القوس $س ب$ ومن $ي$ ليرسم الخط المستقيم $ي ق$ في السطح $اب د$



عموداً على $ب د$ وارسم $س ق$ فيكون $س ق$ عموداً على السطح $اب د$ كما تقدم في

القضية السابقة فتكون $س ق د س ق ي$ قائمتين وس $ق$ جيب القوس $اس$ وفي

المثلث البسيط $س ق ي$ ذي القائمة $س ق ي$ تكون نسبة $س ي : ق :: ق : س ق$

ج $س ي ق$ ($ق ا$ مثلثات مستوية) ولأن $س ي$ وق $ي$ عمودان على $د ي ب$

الذي هو موضع تقاطع السطحين $س ب د ا ب د$ فالزاوية $س ي ق$ هي ميل

هذين السطحين احدهما على الآخر (حد ٤ ك $٢ م$) وهي تعدل الزاوية الكروية

$اب س$ فنسبة جيب الوتر $ب س : ق :: ج القوس اس : ج الزاوية$

المقابلة $اب س$

القضية العشرون

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة نظير جيب الوتر الى نصف

القطر كنظير ماس احدي الزاويتين الى ماس الزاوية الاخرى

ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً ذا قائمة عند $ا$ فنسبة نظير جيب الوتر $ب س$ الى

نصف القطر كنسبة نظير ماس الزاوية

$اب س$ الى ماس الزاوية $اس ب$

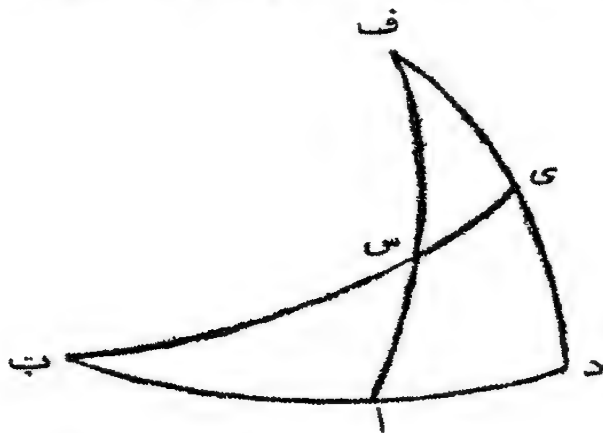
ارسم القوس $د ي$ وليكن $ب$

قطبة وليلاق $اس$ في $ف$ وب $س$ في

$ي$. فلأن القوس $ب د$ تمر في النقطة

$ب$ وهي قطب القوس $د ف$ فالقوس

$د ف$ تمر بقطب $ب د$ ($ق ٤$) ولأن

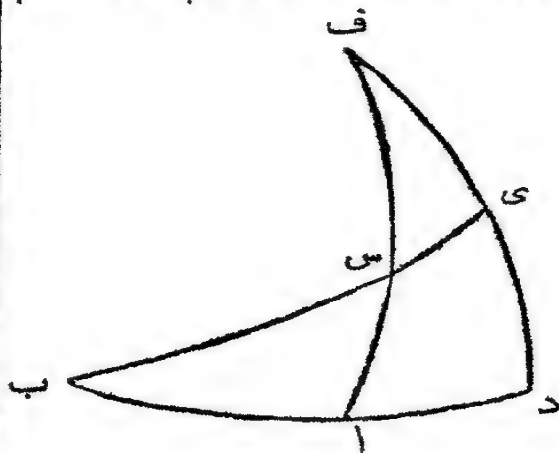


اس عمودية على ب د فسطح الدائرة اس عمودي على سطح الدائرة ب ا د واس
ايضا تمر بقطب ب ا د فتكون ف ذلك القطب وف اربع دائرة وف دربع دائرة
وهكذا ايضاً القوسان ب ي ب د، ففي المثلث س ي ف ذي القائمة عندي يكون
س ي كمال ب س وتر المثلث ا ب س وي ف كمال القوس د ي قياس الزاوية
ا ب س وف س وتر المثلث س ي ف هو كمال القوس اس والقوس ا د قياس
الزاوية س ي ف ي هو كمال القوس ا ب وحسب (ق ١٨) في المثلث س ي ف لنا
ج س ي : ق : ق :: م ي ف : م ي س ف او في المثلث اس ب ب نج ب س
ق : ق :: م ا ب س : م ا س ب
فرع. لان نج ب س : ق : ق :: م ا ب س : م ا س ب و (فرع ا حد ٩
مثلثات مستوية) م ا ب س : ق : ق :: م ا ب س ف بالمساواة م ا س ب :
ن ج ب س : ق : ق :: م ا ب س

القضية الحادية والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب زاوية الى نصف
القطر كما س الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى تماس الوتر

يُرسَم كما في القضية السابقة. ثم في المثلث س ي ف نسبة ج ف ي : ق : ق :: م
س ي : م س ف ي (ق ١٨) ولكن ج ي ف = نج ا ب س وم س ي = م



ب س وم س ف ي = م ا ب فاذا نج

ا ب س : ق : ق :: م ب س : م ا ب

و (فرع اول حد ٩ مثلثات مستوية) م

ب س : ق : ق :: م ب س وم ا ب :

ق : ق :: م ا ب ف بالمساواة بالقلب

م ب س : م ا ب :: م ا ب : م ب س

(ق ١١ ك هـ) نج ا ب س : ق :: م ا ب : م ب س
 فرع اول . يتضح من هذه القضية ان مماسي قوسين مثل ا ب و ب س هما
 بالتكافؤ كنظيري مماسيهما
 فرع ثانٍ . لان نج ا ب س : ق :: م ا ب : م ب س وايضاً ق : نج
 ب س :: م ب س : ق فبالمساواة نج ا ب س : م ب س :: م ا ب : ق اي
 نسبة نظير جيب احدى الزاويتين غير القائمة الى نظير مماس الوتر كنسبة مماس
 الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى نصف القطر

القضية الثانية والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الوتر الى نظير جيب الضلع الاخر
 ليرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف ج س ف : ق :: ج س ي :
 ج س ف ي (ق ١٩) ولكن ج س ف = نج س ا وج س ي = نج ب س وج
 س ف ي = نج ا ب فنسبة نج س ا : ق :: نج ب س : نج ا ب

القضية الثالثة والعشرون

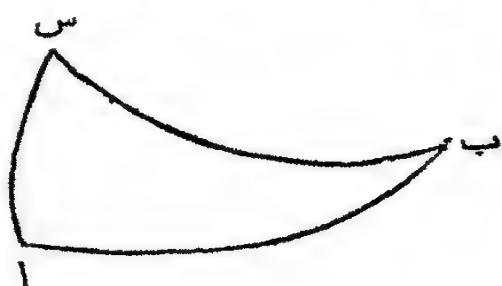
في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع الى جيب
 الزاوية الاخرى

ليرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف ج س ف : ق :: ج ي ف : ج
 ي س ف (ق ١٩) ولكن ج س ف = نج س ا وج ي ف = نج ا ب س وج
 ي س ف = ج ب س ا فاذاً نج س ا : ق :: نج ا ب س : ج ب س ا

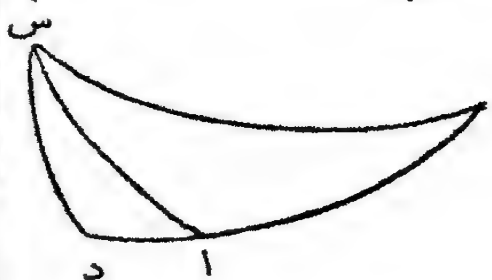
القضية الرابعة والعشرون

في مثلثات كروية ذات قوائم وغيرها تكون جيوب الاضلاع مناسبة لحيوب الزوايا التي تقابلها

اولاً. ليكن ab س ذا قائمة عند a فحسب (ق ١٩) نسبة جيب الوتر bs س



الى نصف القطر او الى جيب القائمة عند a كجيب الضلع as الى جيب الزاوية عند b وايضاً نسبة جيب bs الى جيب الزاوية عند a كجيب ab الى جيب الزاوية عند s (ق ١١ ك ٥) جيب الضلع as الى جيب الزاوية عند b كجيب ab الى جيب الزاوية عند s



ثانياً. ليكن ab س مثلثاً كروياً غير ذي قائمة فتكون نسبة جيب احد اضلاعه مثل bs الى جيب الاخرين as كنسبة جيب الزاوية عند a الى جيب الزاوية عند b . من s ارسم قوس دائرة عظيمة sd عمودية على ab . ففي المثلث ذي القائمة bsd تكون نسبة bs الى sd كنسبة bs الى sd وفي المثلث asd جيب as الى sd كنسبة as الى sd (ق ١٩) وفي المثلث abd جيب ab الى sd كنسبة ab الى sd

جيب as الى جيب ab كنسبة جيب bs الى جيب ab ايضاً ان جيب bs الى جيب ab كنسبة جيب as الى جيب ab وهكذا يبرهن

القضية الخامسة والعشرون

في مثلث كروي غير ذي قائمة اذا رسمت قوس عمودية من احدى الزوايا الى الضلع المقابل لها تكون نسبة نظير جيب احدى الزاويتين عند

القاعدة الى نظير جيب الاخرى كنسبة جيب احد قسي الزاوية التي

انقسمت بالعمودية الى جيب قسمها الآخر

ليرسم كما في القضية السابقة ولتكن س د عمودية على القاعدة ا ب فنسبة نظير

جيب ب : نج ا :: ج ب س د : ج ا س د

لان (ق ٢٢) نج س د : ا ب ق :: نج ب : ج د س ب وفي المثلث ذي القائمة

ا س د نج س د : ا ب ق :: نج ا : ج ا س د و (ق ١١ ك ه) نج ب : ج د س ب ::

نج ا : ج ا س د وبالمبادلة نج ب : نج ا :: ج ب س د : ج ا س د

القضية السادسة والعشرون

ليفرض كما تقدم فنسبة نظير جيب ب س الى نظير جيب س ا كنسبة

نظير جيب ب د الى نظير جيب د ا

لانه في المثلث ب س د (ق ٢٢) نج ب س : نج ب د :: د س : ا ب ق وفي

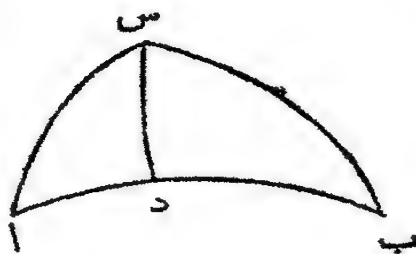
المثلث ا س د نج ا س : نج ا د :: نج د س : ا ب ق و (ق ١١ ك ه) نج ب س : نج ب

ب د :: نج ا س : نج ا د وبالمبادلة نج ب س : نج ا س :: نج ب د : نج ا د

القضية السابعة والعشرون

ليرسم كما تقدم فنسبة جيب ب د الى جيب د ا كنسبة حاس ب الى

حاس ا بالتكافؤ



في المثلث ب س د (ق ١٨) ج ب د : ا ب ق :: م د س : م ب ب وفي المثلث

ا س د ج ا د : ا ب ق :: م د س : م ا فبالمبادلة بالقلب ج ب د : ج ا د :: م

ا : ب

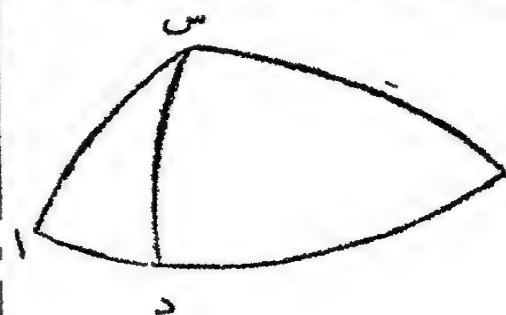
القضية الثامنة والعشرون

ليُرسَم كما تقدم فنسبة نظير جيب احدى الزاويتين الحادتين بالعمودية الى نظير جيب الاخرى كما س واحد الضلعين الى ماس الاخر بالتكافؤ
لأن (ق ٢١) نج ب س د : ل م ق :: م س د : م ب س وايضا نج ا س د :
ل م ق :: م س د : م ا س فبالمبادلة بالقلب نج ب س د : نج ا س د :: م ا س :
م ب س

القضية التاسعة والعشرون

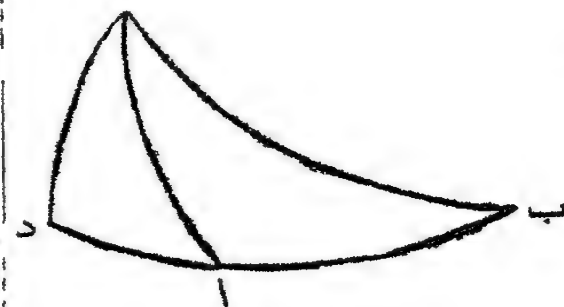
في مثلث كروي اذا رُسِمَت قوس عمودية من احدى زواياه الى الضلع المقابل او القاعدة فالقائم الزوايا مسطح ماس نصف مجتمع قسي القاعدة في ماس نصف فصلتها يعدل القائم الزوايا مسطح ماس نصف مجتمع ضلعي المثلث في ماس فصلتها

ليكن ا ب س مثلثا كرويا ولتُرسَم القوس س د من الزاوية عند س عمودية على



القاعدة ا ب ثم لنفرض ب س = ا و ا س =
ب و ب د = م و ا د = ن فالقائم الزوايا
م ل م (م + ن) × م ل م (م - ن) = ب
م ل م (ا + ب) × م ل م (ا - ب)

لأنه (ق ٢٦) نج ا : نج ب :: نج م :
نجن و (ق ٢٥) نج ا + نج ب : نج ا -
نجن ب :: نج م + نجن : نج م - نجن
(ق ١ فرع ٢ مثلثات مستوية) نج ا +
نجن ب : نج ا - نج ب :: نج م : نج م (ا + ب) :
نم ل م (ا - ب) وايضا نج م + نجن :
نجن م - نجن :: نم ل م (م + ن) : نم ل م (م -



ن) فتكون (ق ١١ ك ٥) نم ل م (ا + ب) : نم ل م (ا - ب) :: نم ل م (م + ن) :

م \div (م - ن) ونسبة الاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علق
واحدة هي كنسبة قواعدها بعضها الى بعض فتكون نسبة م \div (ا + ب) \times ن \div (ا +
ب) : م \div (ا + ب) \times م \div (ا - ب) :: م \div (م + ن) \times ن \div (م + ن) : م \div (م +
ن) \times م \div (م - ن). فالجزء الاول من هذه النسبة والثالث متساويان لان كل
واحد منهما يعدل مربع نصف القطر (فرع اول مثلثات بسيطة) فالثاني والرابع
متساويان (ق ٩ ك هـ) او م \div (م + ن) \times م \div (م - ن) = م \div (ا + ب) \times
م \div (ا - ب) او بترجيح الحروف الاصلية م \div (ب + د + ا) \times م \div (ب - د - ا) =
م \div (ب + س + ا س) \times م \div (ب - س - ا س)

فرع اول. لان اضلاع اشكال متساوية ذات زوايا قائمة هي متناسبة بالتكافؤ
فنسبة م \div (ب + د + ا) : م \div (ب + س + ا س) :: م \div (ب - س - ا س) :
م \div (ب - د - ا)

فرع ثان. اذا وقعت العمودية س د داخل المثلث فلنا ب د + ا د = ا ب
القاعدة واذا وقعت س د خارج المثلث ب د - ا د = ا ب فعلى الحالة الاولى
تصير النسبة السابقة في الفرع الاول هكذا

م \div ا ب : م \div (ب + س + ا س) :: م \div (ب - س - ا س) : م \div (ب - د - ا) وفي
الحالة الثانية تصير بالقلب والمبادلة

م \div ا ب : م \div (ب + س + ا س) :: م \div (ب - س - ا س) : م \div (ب + د + ا)
تنبيه * هذه القضية والاثنان الاثبات قد وضعهن المعلم نايير الاسكوتسي
وهن جزيلات الفائدة لسهولة استعمالهن في الانساب

القضية الثلثون

في مثلث كروي اذا رسمت عمودية من احدى زواياه على الضلع المقابل
او القاعدة تكون نسبة جيب مجتمع الزاويتين عند القاعدة الى جيب
فضلتهما كنسبة جاس نصف القاعدة الى جاس نصف فضلة قسميها اذا
وقعت العمودية داخل المثلث. وكنسبة نظير جاس نصف القاعدة الى

نظير ماسّ مجتمع قسميها اذا وقعت العمودية خارج المثلث. ونسبة
جيب مجتمع الضلعين الى جيب فصلتها كنسبة نظير ماسّ نصف
الزاوية بين الضلعين الى ماسّ نصف فضلة الزاويتين الحادتين بين
الضلعين والعمودية اذا وقعت داخل المثلث. والى ماسّ نصف
مجمعهما اذا وقعت العمودية خارج المثلث

ليكن اب س مثلثا كرويا واد عمودية على القاعدة ب س فنسبة ج (س + ب)

: ج (س - ب) :: مم ب ب س : مم ب (ب - د - د س) اذا وقعت ا د داخل المثلث

وج (س + ب) :

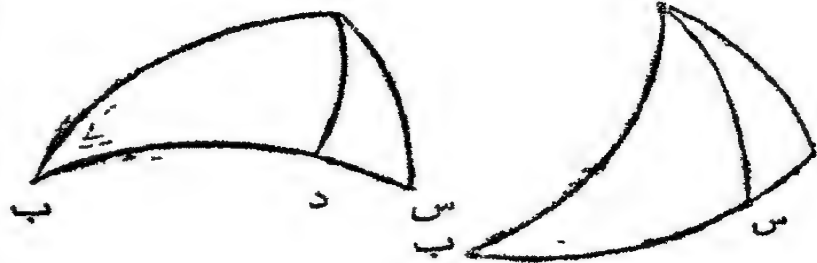
ج (س - ب) ::

ثم ب ب س : ثم ب

(ب د + د س) اذا

وقعت ا د خارج المثلث

وايضاً ج (اب +



اس) : ج (اب - اس) :: ثم ب ب اس : مم ب (ب ا د - س ا د) اذا وقعت ا د

داخل المثلث وج (اب + اس) : ج (اب - اس) :: ثم ب ب اس : ثم ب

(ب ا د + س ا د) اذا وقعت ا د خارج المثلث

لأنه في المثلث ب اس (ق ٢٧) مم ب ب : مم س :: ج س د : ج ب د و (ق ١ ك ه)

مم س + مم ب : مم س - مم ب :: ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د

وحسب السابقة التي نتلوهذه القضية مم س + مم ب : مم س - مم ب :: ج (س +

+ ب) : ج (س - ب) وايضاً ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د :: مم ب

(ب د + س د) : مم ب (ب د - س د) (ق ٢ مثلثات بسيطة) و (ق ١ ك ه)

ج (س + ب) : ج (س - ب) :: مم ب (ب د + س د) : مم ب (ب د - س د)

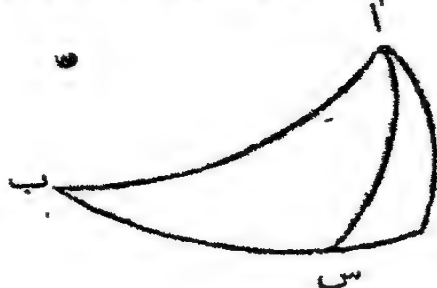
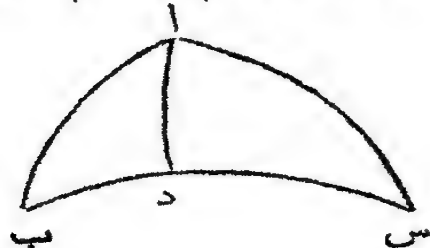
واذا وقعت ا د داخل المثلث ب د + س د = ب س فنسبة ج (س + ب) :

ج (س - ب) :: مم ب ب س : مم ب (ب د - س د) واذا وقعت ا د خارج المثلث

ب د - س د = ب س فنسبة ج (س + ب) : ج (س - ب) :: مم ب (ب د +

س د : مم ل ب س او لكون مماسي قوسين كظيربي مماسيها بالتكافؤ ج د س +
ب : ج د (س - ب) :: مم ل ب س : مم ل ب س (ب د + س د)

بقي ان نبرهن القسم الثاني من هذه القضية . فلان (ق ٢٨) مم ا ب : مم ا س



:: نج س ا د :

نجد ا د تكون

م ا ب + م

ا س : مم ا ب

- مم ا س ::

نجد س ا د + نجد ب ا د : نجد س ا د - نجد ب ا د وحسب السابقة المذكورة اسفل

م ا ب + م ا س : م ا ب - م ا س :: ج د (ا ب + ا س) : ج د (ا ب - ا س)

و (فرع اول ق ٢ مثلثات بسيطة) نجد س ا د + نجد ب ا د : نجد س ا د - نجد ب ا د

:: مم ل ب (ب ا د + س ا د) : مم ل ب (ب ا د - س ا د) فاذا (ق ١١ ك ه) ج د (ا ب

+ ا س) : ج د (ا ب - ا س) :: مم ل ب (ب ا د + س ا د) : مم ل ب (ب ا د - س ا د)

فاذا وقعت ا د داخل المثلث ب ا د + س ا د = ب ا س فنسبة ج د (ا ب + ا س) :

ج د (ا ب - ا س) :: مم ل ب ا س : مم ل ب (ب ا د - س ا د)

واذا وقعت ا د خارج المثلث ب ا د - س ا د = ب ا س فنسبة ج د (ا ب +

ا س) : ج د (ا ب - ا س) :: مم ل ب (ب ا د + س ا د) : مم ل ب ا س اولان مم

ل ب (ب ا د + س ا د) : مم ل ب ا س :: مم ل ب (ب ا د + س ا د) : مم ل ب (ب ا د + س ا د)

فتكون نسبة ج د (ا ب + ا س) : ج د (ا ب - ا س) :: مم ل ب ا س : مم ل ب (ب ا د

+ س ا د)

سابقة

نسبة مجموع مماسي قوسين الى فضلة مماسيها كنسبة جيب مجموع القوسين
الى جيب فضلتها

ليكن ا و ب قوسين فنسبة م ا + م ب : م ا - م ب :: ج د (ا + ب)

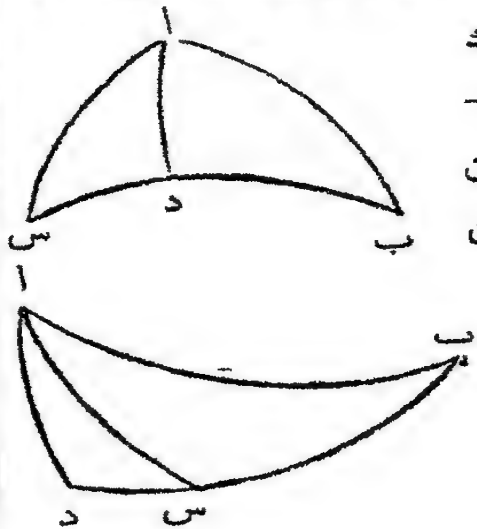
: ج د (ا - ب) لانه (حسب ع ٢ فصل ٢ مثلثات بسيطة) ج ا × نجد ب + نجد ا ×

$$\begin{aligned}
 \text{ج ب} &= \text{ج} (1 + \text{ب}) \text{ فبالقسمة على نج ا} \times \text{نج ب لنا} \\
 \frac{\text{ج ا}}{\text{نج ا}} + \frac{\text{ج ب}}{\text{نج ب}} &= \frac{\text{ج} (1 + \text{ب})}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ اولان } \frac{\text{ج ا}}{\text{نج ا}} = \text{م ا لنا} \\
 \text{م ا} + \text{م ب} &= \frac{\text{ج} (1 + \text{ب})}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان} \\
 \text{م ا} - \text{م ب} &= \frac{\text{ج} (1 - \text{ب})}{\text{نج ا} \times \text{نج ب}} \text{ فاذا نسبة} \\
 \text{م ا} + \text{م ب} : \text{م ا} - \text{م ب} &:: \text{ج} (1 + \text{ب}) : \text{ج} (1 - \text{ب})
 \end{aligned}$$

القضية الحادية والثلاثون

في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجتمع زاويتين منه الى جيب نصف فضلتها كنسبة حاس نصف الضلع الذي يلي الزاويتين الى حاس نصف فضلة الضلعين اللذين يقابلان الزاويتين ونسبة نظير جيب نصف مجتمع هاتين الزاويتين الى نظير جيب فضلتها كنسبة حاس نصف الضلع الذي يليهما الى حاس نصف مجتمع الضلعين اللذين يقابلانها

لنفرض ان $\text{س} + \text{ب} = \text{ص}^2$ و $\text{س} - \text{ب} = \text{ض}^2$ والقاعدة $\text{ب س} = \text{د}^2$ وفضلة قسّمي القاعدة اي $\text{ب د} - \text{ب س} = \text{د}^2$ ك
 فلان (ق ٢٠) $\text{ج} (\text{س} + \text{ب}) : \text{ج} (\text{س} - \text{ب}) :: \text{م} (\text{س} - \text{ب}) : \text{م} (\text{س} + \text{ب})$ تكون
 نسبة $\text{ج} \text{ا}^2 : \text{ج} \text{ب}^2 :: \text{ض}^2 : \text{د}^2$ و لكن
 $\text{ج} \text{ا}^2 \text{ص} = \text{ج} (\text{ص} + \text{ص}) = \text{ج} \text{ا}^2 \text{ص} \times$
 نج ص (فصل ثالث مثلثات بسيطة) وايضاً
 $\text{ج} \text{ا}^2 \text{ض} = \text{ج} \text{ا}^2 \text{ض} \times \text{نج ض}$ فلنا
 $\text{ج} \text{ص} \times \text{نج ص} : \text{ج} \text{ض} \times \text{نج ض} :: \text{م} \text{ب} :$
 م ك. ثم في المثلث الكروي ا ب س قد تبرهن



ان نسبة جـ س + جـ ب : جـ س - جـ ب :: جـ ا ب + جـ ا س : جـ ا ب - جـ ا س
 و (حسب ع^٢ فصل ٢ مثلثات بسيطة) جـ س + جـ ب = ٢ جـ ا (س + ب) +
 نجـ ا (س - ب) = ٢ جـ ص × نجـ ض وجـ س - جـ ب = ٢ نجـ ا (س + ب)
 × جـ ا (س - ب) = ٢ نجـ ص × جـ ض فافاً نسبة ٢ جـ ص × نجـ ض : ٢ نجـ
 ص × جـ ض :: جـ ا ب + جـ ا س : جـ ا ب - جـ ا س وإذا فُرض ان
 (ا ب + ا س) = ط و ا (ا ب - ا س) = ظ (ق ٢ مثلثات بسيطة) جـ ا ب
 + جـ ا س : جـ ا ب - جـ ا س :: م ا (ا ب + ا س) : م ا (ا ب - ا س) ::
 م ط : م ظ فنسبة جـ ص × نجـ ض : نجـ ص × جـ ض :: م ط : م ظ
 ولان $\frac{م ك}{م ب} = \frac{جـ ض \times نجـ ض}{جـ ص \times نجـ ض} = \frac{جـ ض}{جـ ص} = \frac{م ط}{م ظ}$

فبضرب اشياء متساوية في اشياء متساوية نصير

$\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} = \frac{(جـ ض)^2 \times نجـ ص \times نجـ ض}{(جـ ص)^2 \times نجـ ض \times نجـ ص} = \frac{(جـ ض)^2}{(جـ ص)^2}$ ولكن
 (ق ٢٩) $\frac{م ا (ب د - د س)}{م ا (ا ب - ا س)} = \frac{م ا (ا ب + ا س)}{م ا ب س}$ او $\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ظ}$ فاذا
 $\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} \times \frac{م ب}{م ظ}$ وايضاً $\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ظ}$ ولكن $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ب}{م ظ} = \frac{م ط}{م ظ}$
 $\frac{م ط}{م ظ} = \frac{(جـ ض)^2}{(جـ ص)^2}$ فاذا $\frac{م ط}{م ب} = \frac{(جـ ض)^2}{(جـ ص)^2}$ و $\frac{م ط}{م ب} = \frac{جـ ض}{جـ ص}$ او نسبة
 جـ ص : جـ ض :: م ب : م ط او جـ (س + ب) : جـ (س - ب) ::

م ا ب س : م ا (ا ب - ا س) وهذا القسم الاول من القضية
 ايضاً لان $\frac{م ط}{م ب} = \frac{نجـ ص \times جـ ض}{جـ ص \times نجـ ض}$ او بالقلب $\frac{م ط}{م ظ} = \frac{جـ ص \times نجـ ض}{نجـ ص \times جـ ض}$
 ولان $\frac{م ك}{م ب} = \frac{جـ ض \times نجـ ض}{جـ ص \times نجـ ض}$ فبالضرب لنا $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} =$
 $\frac{(نجـ ص)^2}{(جـ ص)^2}$ وقد تبرهن ان $\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط \times م ظ}{(م ب)^2}$ فاذا $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} =$
 $\frac{(م ط)^2}{(م ب)^2}$ وقد تبرهن ان $\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ظ} = \frac{(نجـ ض)^2}{(نجـ ص)^2}$ فاذا $\frac{(م ط)^2}{(م ب)^2} = \frac{(نجـ ض)^2}{(نجـ ص)^2}$

$$\frac{(ط)^2}{(ب)^2} \text{ وبالنسبة } \frac{ط}{ب} = \frac{ط}{ب} \text{ او نسبة نجح ص : نجح ض :: م ب : م ط}$$

م ط او نجح (س + ب) : نجح (س - ب) :: م ط ب س : م ط (س + ب)

وهذا القسم الثاني من القضية

فرع اول. اذا وضع برهان هذه القضية على الزاوية المثلثة ا ب س (ق ١١)
فما ان جيب نصف مجتمع متي قوسين او نصف فضلتهما هو جيب نصف مجتمع
القوسين او نصف فضلتهما وهكذا في نظير الجيوب والمماسات لنصف مجتمع قوسين
متمين او لنصف فضلتهما وبما ان مماس نصف متم قوس هو نظير المماس لنصف
القوس فالنتيجة هي ان في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجتمع ضلعين الى
جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير مماس نصف الزاوية بينهما الى مماس نصف فضلة
الزاويتين اللتين تقابلانها وايضا نسبة نظير جيب نصف مجتمع هذين الضلعين الى
نظير جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير مماس نصف الزاوية بينهما الى مماس نصف
مجتمع الزاويتين المقابلتين لها

فرع ثان. اذا فرض ا ب س الزوايا الثلاث لمثلث كروي و ا ب س
الاضلاع المقابلة لها فلنا هذه النسب

$$(1) \text{ ج ا } (ا + ب) : \text{ ج ا } (ا - ب) :: \text{ م ا } س : \text{ م ا } (ا - ب)$$

$$(2) \text{ نج ا } (ا + ب) : \text{ نج ا } (ا - ب) :: \text{ م ا } س : \text{ م ا } (ا + ب)$$

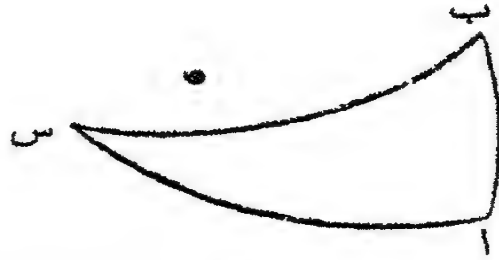
$$(3) \text{ ج ا } (ا + ب) : \text{ ج ا } (ا - ب) :: \text{ م ا } س : \text{ م ا } (ا - ب)$$

$$(4) \text{ نج ا } (ا + ب) : \text{ نج ا } (ا - ب) :: \text{ م ا } س : \text{ م ا } (ا + ب)$$

عملية اولى

في مثلث كروي قائم الزاوية مفروض شيان من اجزائه الستة غير
القائمة فعلينا ان نجد الثلاثة الاخر

هذه العملية لها ست عشرة حالة متضمنة في هذا الجدول مبينة على المثلث
ا ب س ذي القائمة عند ا



مفروض	مطلوب	الحل
ب س	ا س	ا ق : جب س :: جب : ج ا س (١٩)
و	ا ب	ا ق : نجب :: م ب س : م ا ب (٢١)
ب	س	ا ق : نجب س :: م ب : م س (٢٠)
ا س	ا ب	ا ق : ج ا س :: م س : م ا ب (١٨)
و	ب س	نجس : ا ق :: م ا س : م ب س (٢١)
س	ب	ا ق : نج ا س :: ج س : نج ب (٢٢)
ا س	ا ب	م ب : م ا س :: ا ق : ج ا ب (١٨)
و	ب س	ح ب : ج ا س :: ا ق : جب س (١٩)
ب	س	نج ا س : نج ب :: ا ق : ج س (٢٢)
ا س	ا ب	نج ا س : نج ب س :: ا ق : نج ا ب (٢٢)
و	ب	ح ب س : ج ا س :: ا ق : جب (١٩)
ب س	س	م ب س : م ا س :: ا ق : نجس (٢١)
ا ب	ب س	ا ق : نج ا ب :: نج ا س : نج ب س (٢٢)
و	ب	ج ا ب : ا ق :: م ا س : م ب (١٨)
ا س	س	ج ا س : ا ق :: م ا ب : م س (١٨)
ب	ا ب	ج ب : نجس :: ا ق : نج ا ب (٢٢)
و	ا س	ج س : نج ب :: ا ق : نج ا س (٢٢)
س	ب س	م ب : م س :: ا ق : نج ب س (٢٠)

جدول تُعرّف به اجناس الاضلاع والزوايا المستعملة في الجدول السابق

١	ا س وب من جنس واحد
٢	إذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون ا ب وب من جنس واحد وإلا فمختلفان (فرع ١٥)
٣	إذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون س وب من جنس واحد وإلا فمختلفان (١٥)
٤	ا ب وس من جنس واحد (١٤)
٥	إذا كان ا س وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ وإلا فيكون ب س $< ٩٠^\circ$ (فرع ١٥)
٦	ب و ا س من جنس واحد
٧	ملتبس
٨	ملتبس
٩	ملتبس
١٠	إذا كانت ب س $> ٩٠^\circ$ يكون ا ب و ا س من جنس واحد وإلا فمختلفان (١٥)
١١	ا س وب من جنس واحد (١٤)
١٢	إذا كانت ب س $> ٩٠^\circ$ يكون ا س وس من جنس واحد وإلا فمختلفان (فرع ١٥)
١٣	ب س $> ٩٠^\circ$ إذا كان ا ب و ا س من جنس واحد (فرع اول ١٥)
١٤	ب و ا س من جنس واحد (١٤)
١٤	س و ا ب من جنس واحد (١٤)
١٥	ا ب وس من جنس واحد (١٤)
١٥	ا س وب من جنس واحد (١٤)
١٥	إذا كانت ب وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ وإلا فيكون ب س $< ٩٠^\circ$ (١٥)

تنبيه * يراد بالملتبس ان المطلوب له قيمتان اي زاوية ما او متممها

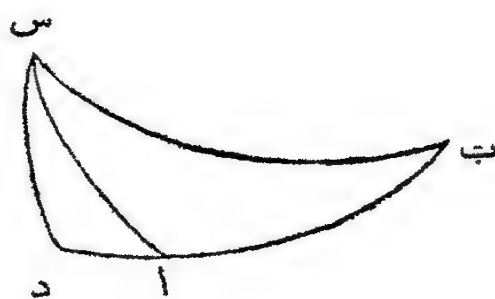
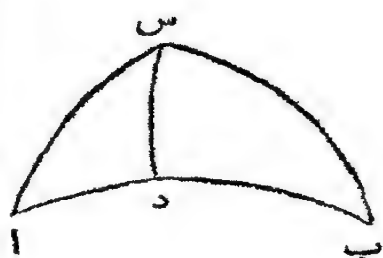
هذا الجدول مثل الاول غير انه قد فرض فيه ان \bar{A} = الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة \bar{a} وب \bar{B} = الضلع الذي يقابل الزاوية \bar{b} وس \bar{S} = الضلع الذي يقابل الزاوية \bar{s}

١	$\bar{B} = \bar{A} \times \bar{J}$	\bar{B}	\bar{a} وب
٢	$\bar{M} = \bar{M} \times \bar{N}$	\bar{S}	
٣	$\bar{N} = \bar{N} \times \bar{M}$	\bar{S}	
٤	$\bar{M} = \bar{J} \times \bar{M}$	\bar{S}	\bar{B} وس
٥	$\bar{M} = \frac{\bar{M}}{\bar{N}}$	\bar{A}	
٦	$\bar{N} = \bar{J} \times \bar{M}$	\bar{B}	
٧	$\bar{J} = \frac{\bar{M}}{\bar{M}}$	\bar{S}	\bar{B} وب
٨	$\bar{J} = \frac{\bar{J}}{\bar{J}}$	\bar{A}	
٩	$\bar{J} = \frac{\bar{N}}{\bar{N}}$	\bar{S}	
١٠	$\bar{J} = \frac{\bar{N}}{\bar{N}}$	\bar{S}	\bar{a} وب
١١	$\bar{J} = \frac{\bar{J}}{\bar{J}}$	\bar{B}	
١٢	$\bar{N} = \frac{\bar{M}}{\bar{M}}$	\bar{S}	
١٣	$\bar{N} = \bar{J} \times \bar{N}$	\bar{A}	\bar{B} وس
١٤	$\bar{M} = \frac{\bar{M}}{\bar{J}}$	\bar{B}	
١٤	$\bar{M} = \frac{\bar{M}}{\bar{S}}$	\bar{S}	
١٥	$\bar{N} = \frac{\bar{N}}{\bar{J}}$	\bar{S}	\bar{B} وس
١٥	$\bar{N} = \frac{\bar{N}}{\bar{J}}$	\bar{B}	
١٦	$\bar{N} = \frac{\bar{N}}{\bar{S}}$	\bar{A}	

عملية ثانية

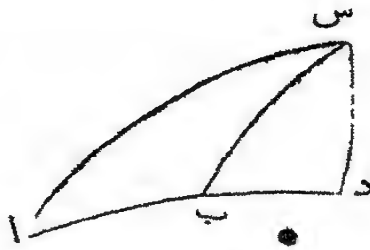
في مثلث كروي غير ذي قائمة مفروض ثلاثة اشياء من ستة فعلينا ان
نجد الثلاثة الأخر

تنبيه. في هذا الجدول اذا رايت حرف الحاء قدام رقم هندي هكذا (ح ٤)
فلاشارة بذلك الى الحالات في الجدول السابق. والاعداد وحدها تشير الى قضايا
اصول المثلثات الكروية



مفروض	مطلوب	الحل
الضلعان ا ب ا س والزاوية بينهما ١	احدى الزاويتين الاخريتين ب ب	ارسم العمودية س د من الزاوية المجهولة على ا ب فنسبة ا ق : نج ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) فيعرف ب د وج ب د : ج ا د :: م ا : م ب (٢٧) ب ب و ا من جنس واحد اذا كان ا ب < ب د والا فيختلفان (١٦)
الضلع الثالث ب س		ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المجهولتين على الضلع ا ب ثم نسبة ا ق : نج ا :: م ا س : م ا د (ح ٢) فيعرف ب د ونج ا د : نج ب د :: نج ا س : نج ب س (٢٦) اذا كان ا د و د ب من جنس واحد يكون ا س و س ب من جنس واحد والا فيختلفان

مفروض	مطلوب	الحل
الزاويتان ا و ب والضلع بينهما اس	الضلع ب س	من س طرف اس الذي يلي الضلع المطلوب ارسم س د عمودية على ا ب ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ثم ا س د (ح ٢) فتعرف ب س د ونسبة نج ب س د : نج اس د :: م ا س : م ب س (٢٨) اذا كان ا و ب س د من جنس واحد يكون ب س > ٩٠ والا فاكبر من ٩٠
الزاوية الثالثة ب	الزاوية الثالثة ب	ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المفروضتين على ا ب الضلع المقابل ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ثم اس د (ح ٢) فتعرف ب س د ونسبة ج ا س د : ج ب س د :: نج ا : نج ب (٢٥) اذا وقعت س د داخل المثلث او كانت اس ب اكبر من ب س د تكون ب و ا من جنس واحد والا فمختلفتان (١٦)
الزاوية ب التي تقابل الضلع الاخر المفروض اس	الزاوية ب التي تقابل الضلع الاخر المفروض اس	ج ب س : ج ا س :: ج ا : ج ب (٢٤) جنس ب ملتبس الا اذا تعين كون ا + ب اكثرا و اقل من ١٨٠ لكون اس + ب س اكثرا و اقل من ١٨٠ (١٠)
ضلعان ا س و ب س والزاوية ا التي تقابل احدها ب س	الزاوية الضلعين المفروضين	من اس ب الزاوية المطلوبة ارسم س د عمودية على اس ب بين ا ب ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ثم (ح ٢) وم ب س : م ا س :: نج ا س د : نج ب س د (٢٨) واس د \pm ب س د = اس ب وهي ملتبسة
الضلع الثالث ا ب	الضلع الثالث ا ب	ارسم س د عمودية من س الزاوية بين الضلعين المفروضين على ا ب ثم ا ق : نج ا س :: م ا : ثم ا د (ح ٢) ونج ا س : نج ب س :: نج ا د : نج ب د (٢٦) و ا ب = ا د \pm ب د فيكون ا ب ملتبسا



مفروض	مطلوب	الحل
زاويتان اوب والضلع اس الذي يقابل احدهما ب	الضلع ب س	ج ب : ج ا :: ج ا س : ج ب س (٢٤) وب س ٨
	المقابل الزاوية	ملتبس الا اذا تعين كون اس + ب س اكثر او اقل
	الاخرى	من ١٨٠° حسبما كانت ا + ب اكثر او اقل من ١٨٠° (١٠)
زاوية ا ب	الضلع ا ب	من الزاوية المجهولة س ا رسم س د عمودية على ا ب ثم ٩
	الذي يلي	ا ب ق : نج ا س :: م ا س : م ا د (ح ٢) وم ب : م ا
	الزاويتين	ج ا د : ج ب د وب د ملتبس فاذا ا ب = ا د ±
المفروضتين	ب د وله اربع قيمات غير ان البعض منها يخرج بلزوم	كون ا ب اقل من ١٨٠°
	اوب	
	الزاوية	من الزاوية المطلوبة ا رسم س د عمودية على ا ب ثم ١٠
الزاوية الثالثة	ا ب ق : نج ا س :: م ا س : م ا د (ح ٢) ونج ا :	
	نج ب : ج ا س :: ج ب س : د (٢٥) ب س د	
	ملتبس فاذا ا س = ب س د ± ب س د ولها اربع	
اس ب	قيمت غير ان البعض منها يخرج بلزوم كون ا س ب	
	اقل من ١٨٠°	

الاضلاع	احدى	<p>من س احدى الزاويتين الغير المطلوبتين ا رسم س د ١١ عمودية على اب . ثم استعلم قوسا ي حتى تكون نسبة مم ا ب : مم ا س (ا س + ب س) :: مم ا س - ب س : مم ا ي . فانها كان اب اكبر من ي فيكون اب مجتمع اد ود ب وي فضلتهما واذا كان اب اصغر من ي يكون مجتمع اد ود ب واب فضلتهما (٢٩) وعلى الحالين اد وب د معروفان ومم اس : مم اد :: ا ق : نجا</p>
الزوايا	احد	<p>افرض متمات الزوايا ا وب وس المفروضة آ وب ١٢ وس واحسبها اضلاع مثلث كروى واستعلم بالحالة السابقة الزاوية من هذا المثلث التي تقابل الضلع آ فهي متم ضلع المثلث المفروض الذي يقابل الزاوية امنة اي ب س (١١)</p>
الثلاث	الاضلاع	
اوب	ب س	
وس		

في هذا الجدول فُرضت الزوايا ا وب وس كما تقدم ولاضلاع التي تقابلها
وبّ وسّ وك وي يعدلان قسي القاعدة او قسي الزاوية التي تقابلها

مفروض	مطلوب	الحل
ضلعان بّ وسّ والزاوية بينهما ا	ب	استعلم ك حتى ان م م ك : م بّ × نج ا ثم م ب = ا ح ك × ا م ج (س' - ك)
الزاويتان ا وس	ا	استعلم ك كما تقدم ثم نج ا = نج ب' × نج (س' - ك) نج ك
والضلع بّ	ب	استعلم ك حتى ان م م ك = نج ب' × م ا ثم م ا = ا م ب' × نج ك نج (س' - ك)
الضلعان ا وبّ والزاوية ا	ب	استعلم ك كما تقدم ثم نج ب = نج ا × ج (س' - ك) ج ك
ب	ب	ج ب = ج ب' × ج ا ج ا
س	س	استعلم ك حتى ان م م ك = نج ب' × م ا ثم نج ب = ا نج ك × م ب ا م
سّ	سّ	استعلم ك حتى ان م م ك = م بّ × نج ا واستعلم ي حتى ان نج ب = نج ا' × نج ك نج ب ت س = ك + ي
الزاويتان ا وب والضلع بّ	ا	ج ا = ج ب' × ج ا ج ب
سّ	سّ	استعلم ك حتى ان م م ك = م بّ × نج ا واستعلم ي حتى ان ج ي = ح ك × ا م م ب س = ك + ي
سّ	سّ	استعلم ك حتى ان م م ك = نج ب' × م ا واستعلم ي حتى ان ج ي = ح ك × نج ب نج ا س = ك + ي

مروض	مطلوب	الحل
١	١	<p>١١</p> <p>لنفرض ان $\bar{a} + \bar{b} + \bar{s} = \bar{v}$</p> $\frac{\bar{a}(\bar{b} - \bar{s}) \times \bar{c}(\bar{b} - \bar{s})}{\bar{a}\bar{b} \times \bar{c}\bar{s}} = \frac{1}{3}$ <p>ج $\frac{1}{3}$</p> $\frac{\bar{a}(\bar{b} - \bar{s}) \times \bar{c}(\bar{b} - \bar{s})}{\bar{a}\bar{b} \times \bar{c}\bar{s}} = \frac{1}{3}$ <p>او نج $\frac{1}{3}$</p>
١	٦	<p>١٢</p> <p>لنفرض ان $\bar{a} + \bar{b} + \bar{s} = \bar{v}$</p> $\frac{\bar{a}(\bar{b} - \bar{s}) \times \bar{c}(\bar{b} - \bar{s})}{\bar{a}\bar{b} \times \bar{c}\bar{s}} = \frac{1}{3}$ <p>ج $\frac{1}{3}$</p> <p>٦</p> $\frac{\bar{a}(\bar{b} - \bar{s}) \times \bar{c}(\bar{b} - \bar{s})}{\bar{a}\bar{b} \times \bar{c}\bar{s}} = \frac{1}{3}$ <p>او نج $\frac{1}{3}$</p>

حدود

٢ اذا أُجِدَّ واحد من هذه الاحراء الخمسة وسمي الوسط من الاربعة الباقية

مما ل ذلك في المملات اس فالاحراء

٩-١٠-١١-١٢-١٣-١٤-١٥-١٦-١٧-١٨-١٩-٢٠-٢١-٢٢-٢٣-٢٤-٢٥-٢٦-٢٧-٢٨-٢٩-٣٠-٣١-٣٢-٣٣-٣٤-٣٥-٣٦-٣٧-٣٨-٣٩-٤٠-٤١-٤٢-٤٣-٤٤-٤٥-٤٦-٤٧-٤٨-٤٩-٥٠-٥١-٥٢-٥٣-٥٤-٥٥-٥٦-٥٧-٥٨-٥٩-٦٠-٦١-٦٢-٦٣-٦٤-٦٥-٦٦-٦٧-٦٨-٦٩-٧٠-٧١-٧٢-٧٣-٧٤-٧٥-٧٦-٧٧-٧٨-٧٩-٨٠-٨١-٨٢-٨٣-٨٤-٨٥-٨٦-٨٧-٨٨-٨٩-٩٠-٩١-٩٢-٩٣-٩٤-٩٥-٩٦-٩٧-٩٨-٩٩-١٠٠-١٠١-١٠٢-١٠٣-١٠٤-١٠٥-١٠٦-١٠٧-١٠٨-١٠٩-١١٠-١١١-١١٢-١١٣-١١٤-١١٥-١١٦-١١٧-١١٨-١١٩-١٢٠-١٢١-١٢٢-١٢٣-١٢٤-١٢٥-١٢٦-١٢٧-١٢٨-١٢٩-١٣٠-١٣١-١٣٢-١٣٣-١٣٤-١٣٥-١٣٦-١٣٧-١٣٨-١٣٩-١٤٠-١٤١-١٤٢-١٤٣-١٤٤-١٤٥-١٤٦-١٤٧-١٤٨-١٤٩-١٥٠-١٥١-١٥٢-١٥٣-١٥٤-١٥٥-١٥٦-١٥٧-١٥٨-١٥٩-١٦٠-١٦١-١٦٢-١٦٣-١٦٤-١٦٥-١٦٦-١٦٧-١٦٨-١٦٩-١٧٠-١٧١-١٧٢-١٧٣-١٧٤-١٧٥-١٧٦-١٧٧-١٧٨-١٧٩-١٨٠-١٨١-١٨٢-١٨٣-١٨٤-١٨٥-١٨٦-١٨٧-١٨٨-١٨٩-١٩٠-١٩١-١٩٢-١٩٣-١٩٤-١٩٥-١٩٦-١٩٧-١٩٨-١٩٩-٢٠٠-٢٠١-٢٠٢-٢٠٣-٢٠٤-٢٠٥-٢٠٦-٢٠٧-٢٠٨-٢٠٩-٢١٠-٢١١-٢١٢-٢١٣-٢١٤-٢١٥-٢١٦-٢١٧-٢١٨-٢١٩-٢٢٠-٢٢١-٢٢٢-٢٢٣-٢٢٤-٢٢٥-٢٢٦-٢٢٧-٢٢٨-٢٢٩-٢٣٠-٢٣١-٢٣٢-٢٣٣-٢٣٤-٢٣٥-٢٣٦-٢٣٧-٢٣٨-٢٣٩-٢٤٠-٢٤١-٢٤٢-٢٤٣-٢٤٤-٢٤٥-٢٤٦-٢٤٧-٢٤٨-٢٤٩-٢٥٠-٢٥١-٢٥٢-٢٥٣-٢٥٤-٢٥٥-٢٥٦-٢٥٧-٢٥٨-٢٥٩-٢٦٠-٢٦١-٢٦٢-٢٦٣-٢٦٤-٢٦٥-٢٦٦-٢٦٧-٢٦٨-٢٦٩-٢٧٠-٢٧١-٢٧٢-٢٧٣-٢٧٤-٢٧٥-٢٧٦-٢٧٧-٢٧٨-٢٧٩-٢٨٠-٢٨١-٢٨٢-٢٨٣-٢٨٤-٢٨٥-٢٨٦-٢٨٧-٢٨٨-٢٨٩-٢٩٠-٢٩١-٢٩٢-٢٩٣-٢٩٤-٢٩٥-٢٩٦-٢٩٧-٢٩٨-٢٩٩-٣٠٠-٣٠١-٣٠٢-٣٠٣-٣٠٤-٣٠٥-٣٠٦-٣٠٧-٣٠٨-٣٠٩-٣١٠-٣١١-٣١٢-٣١٣-٣١٤-٣١٥-٣١٦-٣١٧-٣١٨-٣١٩-٣٢٠-٣٢١-٣٢٢-٣٢٣-٣٢٤-٣٢٥-٣٢٦-٣٢٧-٣٢٨-٣٢٩-٣٣٠-٣٣١-٣٣٢-٣٣٣-٣٣٤-٣٣٥-٣٣٦-٣٣٧-٣٣٨-٣٣٩-٣٤٠-٣٤١-٣٤٢-٣٤٣-٣٤٤-٣٤٥-٣٤٦-٣٤٧-٣٤٨-٣٤٩-٣٥٠-٣٥١-٣٥٢-٣٥٣-٣٥٤-٣٥٥-٣٥٦-٣٥٧-٣٥٨-٣٥٩-٣٦٠-٣٦١-٣٦٢-٣٦٣-٣٦٤-٣٦٥-٣٦٦-٣٦٧-٣٦٨-٣٦٩-٣٧٠-٣٧١-٣٧٢-٣٧٣-٣٧٤-٣٧٥-٣٧٦-٣٧٧-٣٧٨-٣٧٩-٣٨٠-٣٨١-٣٨٢-٣٨٣-٣٨٤-٣٨٥-٣٨٦-٣٨٧-٣٨٨-٣٨٩-٣٩٠-٣٩١-٣٩٢-٣٩٣-٣٩٤-٣٩٥-٣٩٦-٣٩٧-٣٩٨-٣٩٩-٤٠٠-٤٠١-٤٠٢-٤٠٣-٤٠٤-٤٠٥-٤٠٦-٤٠٧-٤٠٨-٤٠٩-٤١٠-٤١١-٤١٢-٤١٣-٤١٤-٤١٥-٤١٦-٤١٧-٤١٨-٤١٩-٤٢٠-٤٢١-٤٢٢-٤٢٣-٤٢٤-٤٢٥-٤٢٦-٤٢٧-٤٢٨-٤٢٩-٤٣٠-٤٣١-٤٣٢-٤٣٣-٤٣٤-٤٣٥-٤٣٦-٤٣٧-٤٣٨-٤٣٩-٤٤٠-٤٤١-٤٤٢-٤٤٣-٤٤٤-٤٤٥-٤٤٦-٤٤٧-٤٤٨-٤٤٩-٤٥٠-٤٥١-٤٥٢-٤٥٣-٤٥٤-٤٥٥-٤٥٦-٤٥٧-٤٥٨-٤٥٩-٤٦٠-٤٦١-٤٦٢-٤٦٣-٤٦٤-٤٦٥-٤٦٦-٤٦٧-٤٦٨-٤٦٩-٤٧٠-٤٧١-٤٧٢-٤٧٣-٤٧٤-٤٧٥-٤٧٦-٤٧٧-٤٧٨-٤٧٩-٤٨٠-٤٨١-٤٨٢-٤٨٣-٤٨٤-٤٨٥-٤٨٦-٤٨٧-٤٨٨-٤٨٩-٤٩٠-٤٩١-٤٩٢-٤٩٣-٤٩٤-٤٩٥-٤٩٦-٤٩٧-٤٩٨-٤٩٩-٥٠٠-٥٠١-٥٠٢-٥٠٣-٥٠٤-٥٠٥-٥٠٦-٥٠٧-٥٠٨-٥٠٩-٥١٠-٥١١-٥١٢-٥١٣-٥١٤-٥١٥-٥١٦-٥١٧-٥١٨-٥١٩-٥٢٠-٥٢١-٥٢٢-٥٢٣-٥٢٤-٥٢٥-٥٢٦-٥٢٧-٥٢٨-٥٢٩-٥٣٠-٥٣١-٥٣٢-٥٣٣-٥٣٤-٥٣٥-٥٣٦-٥٣٧-٥٣٨-٥٣٩-٥٤٠-٥٤١-٥٤٢-٥٤٣-٥٤٤-٥٤٥-٥٤٦-٥٤٧-٥٤٨-٥٤٩-٥٥٠-٥٥١-٥٥٢-٥٥٣-٥٥٤-٥٥٥-٥٥٦-٥٥٧-٥٥٨-٥٥٩-٥٦٠-٥٦١-٥٦٢-٥٦٣-٥٦٤-٥٦٥-٥٦٦-٥٦٧-٥٦٨-٥٦٩-٥٧٠-٥٧١-٥٧٢-٥٧٣-٥٧٤-٥٧٥-٥٧٦-٥٧٧-٥٧٨-٥٧٩-٥٨٠-٥٨١-٥٨٢-٥٨٣-٥٨٤-٥٨٥-٥٨٦-٥٨٧-٥٨٨-٥٨٩-٥٩٠-٥٩١-٥٩٢-٥٩٣-٥٩٤-٥٩٥-٥٩٦-٥٩٧-٥٩٨-٥٩٩-٦٠٠-٦٠١-٦٠٢-٦٠٣-٦٠٤-٦٠٥-٦٠٦-٦٠٧-٦٠٨-٦٠٩-٦١٠-٦١١-٦١٢-٦١٣-٦١٤-٦١٥-٦١٦-٦١٧-٦١٨-٦١٩-

نقرر ذلك فليكونه الاحراء الدائرة هي في هذه

القضية

في مثلث كروي قائم الزاوية القائم الزوايا مسطح نصف القطر في جيب
الوسط يعدل القائم الزوايا مسطح مما سي الموالين او يعدل مسطح
نظيري جيبى المقابلين

تبرهن هذه القضية بان يجعل كل جزء وسطا في بونو ثم تقابل القضية على
احد البراهين السابق ذكرها، فاذا جعل ب س وسطا لنا ٢٠ - ب و ٢٠ - س
المواليات و ا ب و ا س المقابلان و ا ق × نج ب س = نج ب × ثم س (حسب
ق ٢٠ فرع) و ا ق × نج ب س = نج ا ب × نج ا س (حسب ق ٢١)

فاذا قصدت ان تحل مسألة بواسطة هذه القضية فانظر الى اى الاشياء المسماة
اعني المفروضين والمطلوب يجعل وسطا لكي يكون الاخران على بعد واحد منه فلا
بد من وجود المطلوب في احدى النظريتين المذكورتين في القضية

فلو فرض ا ب و ا س وكان المطلوب س فالامر واضح انه اذا جعل ا ب
وسطا يكون ب س وس المقابلين و ا ق × ج ا ب = ج س × ج ب س لان
ج س = نج (٢٠ - س) ونج (٢٠ - ب س) = ج ب س فاذا ج س =
ج ا ب
ج ب س

ولو فرض ب س وس وكان ا س المطلوب فاذا جعل س وسطا يكون
ا س و ٢٠ - ب س الموالين و ا ق × نج س = مم ا س × نج ب س او مم ا س =
نج س
مم ب س = نج س + مم ب س لانه قد تبرهن سابقا ان مم ب س =
مم ب س

وقد استخرج المعلم نابهر من القضية الحادية والتلخيص عبارات لحل المسائل في
مثلث غير دية قائمة، فاي فرض كما تقدم روايا المثلث ا و ب وس والاصلاع التي
تقابلها آ و ب وس فلما اربعة احوال

(١)

مفروض ضلعان ب و س والزاوية بينهما
مطلوب الزاويتان ب وس

١٨

To: www.al-mostafa.com